Ingegneria gestionale

ANALISI MATEMATICA 1 - Prova scritta d'esame del 14 giugno 2019

COGNOME ________________________ NOME _____________________________

numero di matricola ☐☐☐☐☐☐☐

N. B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 2. Sia f la funzione di una variabile reale definita da

$$f(x) := e^{\alpha/x} - x/(x+1)$$

1) [p. 1] Determinare il dominio di f.
2) [p. 3] Stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) la funzione f è infinitesima per $x \to 0^+$.
3) [p. 4] Per gli α di cui al punto 2), determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0^+$.
4) [p. 1] Stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) la funzione f è infinitesima per $x \to +\infty$.
5) [p. 6] Per gli α di cui al punto 4), determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$.

Svolgimento

1) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: \ x \neq 0, \ x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\alpha}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Poiché $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$, ne segue che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Pertanto f è infinitesima per $x \to 0^+ \iff \alpha < 0$.

3) Sia $\alpha \in (-\infty, 0)$ (cf. punto 2)). Posto $f_1(x) = e^{\frac{\alpha}{x}}$, $f_2(x) = \frac{x}{x+1}$, si ha che $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\forall\, x \in Dom(f)$; inoltre, sia f_1 che f_2 sono infinitesime per $x \to 0^+$. Poiché $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \neq 0$, ne segue che f_2 è <u>infinitesima di ordine 1</u> per $x \to 0^+$. D'altra parte, dato che $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\alpha}{x} = -\infty$, utilizzando il limite notevole $\lim\limits_{t \to -\infty} |t|^\beta e^t = 0$ (con $\beta \in (0, +\infty)$) si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x^\beta} = 0 \qquad \forall\, \beta \in (0, +\infty),$$

e cioè che f_1 è infinitesima per $x \to 0^+$ di ordine superiore a β per ogni $\beta \in (0, +\infty)$; in particolare, f_1 è infinitesima di ordine superiore a 1 per $x \to 0^+$. Ma allora f, in quanto somma di un infinitesimo di ordine 1 e di un infinitesimo di ordine superiore ad 1 per $x \to 0^+$, è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0^+$.

4) Osserviamo che $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{x} = 0$, e quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\alpha}{x}} = 1$. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, ne segue che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - 1 = 0 \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pertanto f è infinitesima per $x \to +\infty$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

5) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ (cf. punto 4)). Posto $g_1(x) = e^{\frac{\alpha}{x}} - 1$, $g_2(x) = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$, si ha che $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ $\forall\ x \in Dom(f)$ e che sia g_1 (per $\alpha \neq 0$; se $\alpha = 0$, g_1 è la funzione nulla) che g_2 sono infinitesime di ordine 1 per $x \to +\infty$; pertanto, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, f è infinitesima di ordine superiore o uguale ad 1 per $x \to +\infty$; solo nel caso $\alpha = 0$ possiamo già concludere che f è infinitesima di ordine 1 per $x \to +\infty$.
Supponiamo quindi $\alpha \neq 0$. Dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{x} = 0$, per determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$ utilizziamo la formula di Mac Laurin per la funzione esponenziale; proviamo con la formula di ordine 2.
Poiché

$$e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

ne segue che, $\forall\ x \in (0, +\infty)$,

$$f(x) = e^{\frac{\alpha}{x}} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{\alpha}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{(\alpha+1)x + \alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Per $\alpha \neq -1$, la frazione $\frac{(\alpha+1)x+\alpha}{x(x+1)}$ è il rapporto tra un infinito di ordine 1 ed un infinito di ordine 2 per $x \to +\infty$, e quindi è **infinitesima** di ordine 1 per $x \to +\infty$; ma allora, se $\alpha \neq -1$, f è infinitesima di ordine 1 per $x \to +\infty$. Per $\alpha = -1$, dalla formula precedente otteniamo che, $\forall\ x \in (0, +\infty)$,

$$f(x) = -\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{2x + x + 1}{2x^2(x+1)} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{3x+1}{2x^2(x+1)} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

La frazione $\frac{3x+1}{2x^2(x+1)}$, in quanto rapporto tra un infinito di ordine 1 ed un infinito di ordine 3 per $x \to +\infty$, è **infinitesima** di ordine 2 per $x \to +\infty$; ma allora f è infinitesima di ordine 2 per $x \to +\infty$.
Abbiamo quindi dimostrato che, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, f è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine $\begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \neq -1 \\ 2 & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$.