ESERCIZIO SULLE FUNZIONI (IMMAGINE, MONOTONIA, FUNZIONI INVERSE, FUNZIONI COMPOSTE)

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + \alpha & \text{se } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \qquad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R}).$$

1) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'immagine di f.
2) Stabilire per quali valori di α (se ne esistono) la funzione f è surgettiva.
3) Stabilire per quali valori di α (se ne esistono) la funzione f è iniettiva.
4) Stabilire per quali valori di α (se ne esistono) la funzione f è monotona.
5) Per i valori di α di cui al punto 3), determinare f^{-1}.
6) Per $\alpha = -\sqrt{2}$, determinare $f \circ p_{-1}$ e $p_{-1} \circ f$ (dove p_{-1} denota la potenza di esponente -1).
7) Trovare (se esiste) un numero reale α tale che l'immagine di f sia un intervallo.

Svolgimento dell'esercizio

1) Poiché $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, 1] \cup (1, +\infty)$ e

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + \alpha & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \text{ oppure } x < -1, \end{cases}$$

si ha che

$$Im(f) = f\big((-\infty, -1)\big) \cup f([-1, 1]) \cup f\big((1, +\infty)\big) \tag{1.1}$$

e che

$$f\big((1, +\infty)\big) = \left\{\tfrac{1}{x} :\ x \in (1, +\infty)\right\}, \qquad f\big((-\infty, -1)\big) = \left\{\tfrac{1}{x} :\ x \in (-\infty, -1)\right\}, \tag{1.2}$$
$$f([-1, 1]) = \{2^x + \alpha :\ x \in [-1, 1]\}.$$

Determiniamo $f\big((1, +\infty)\big)$.
Sia $y \in \mathbb{R}$; da (1.2) segue che $y \in f\big((1, +\infty)\big) \iff$ esiste $x > 1$ t.c. $y = \frac{1}{x}$. Osserviamo che $y = \frac{1}{x} \iff y \neq 0$ e $x = \frac{1}{y}$; quindi $x > 1 \iff 0 < y < 1$. Pertanto

$$f\big((1, +\infty)\big) = (0, 1). \tag{1.3}$$

Ora determiniamo $f\big((-\infty, -1)\big)$.
Sia $y \in \mathbb{R}$; per (1.2) si ha che $y \in f\big((-\infty, -1)\big) \iff$ esiste $x < -1$ t.c. $y = \frac{1}{x}$. Come nel caso precedente, si ha che $y = \frac{1}{x} \iff y \neq 0$ e $x = \frac{1}{y}$; quindi $x < -1 \iff -1 < y < 0$. Perciò

$$f\big((-\infty, -1)\big) = (-1, 0). \tag{1.4}$$

Infine, determiniamo $f([-1, 1])$.
Sia $y \in \mathbb{R}$; allora, per (1.2), $y \in f([-1, 1]) \iff$ esiste $x \in [-1, 1]$ t.c. $y = 2^x + \alpha$. Osserviamo che

$$y = 2^x + \alpha \iff 2^x = y - \alpha \iff y > \alpha \quad \text{e} \quad x = \log_2(y - \alpha);$$

quindi

$$-1 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq \log_2(y - \alpha) \leq 1 \iff \tfrac{1}{2} \leq y - \alpha \leq 2 \iff \alpha + \tfrac{1}{2} \leq y \leq \alpha + 2.$$

Pertanto

$$f([-1,1]) = \left[\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + 2\right]. \tag{1.5}$$

Da (1.1), (1.3), (1.4) e (1.5) segue ora che

$$Im(f) = (-1,0) \cup (0,1) \cup \left[\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + 2\right]. \tag{1.6}$$

2) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $Im(f)$ è l'unione di tre intervalli <u>limitati</u> (cf. (1.6)), e quindi è a sua volta un insieme limitato; ma allora <u>non può essere uguale ad $\mathbb{R}$</u>, che ovviamente non è limitato. Pertanto non esistono valori di α per i quali f sia surgettiva.

3) Osserviamo innanzitutto che in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ la funzione f coincide con p_{-1}, che è iniettiva; pertanto $f_{|(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$ è iniettiva. Inoltre, dato che $f(x) = 2^x + \alpha \ \ \forall\ x \in [-1,1]$ e che la funzione esponenziale in base 2 è strettamente crescente, si ha che f è strettamente crescente in $[-1,1]$, e quindi $f_{|[-1,1]}$ è iniettiva. Ma allora f è iniettiva se e solo se $f\big((-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\big) \cap f([-1,1]) = \emptyset$. Pertanto, utilizzando (1.3), (1.4) e (1.5), otteniamo che

$$\begin{aligned} &f \text{ è iniettiva} \iff \big((-1,0)\cup(0,1)\big) \cap \left[\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + 2\right] = \emptyset \\ &\iff \alpha + 2 \le -1 \quad \text{oppure} \quad \alpha + \tfrac{1}{2} \ge 1 \iff \alpha \in (-\infty,-3] \cup \left[\tfrac{1}{2},+\infty\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

4) Come osservato al punto 3), f è strettamente crescente in $[-1,1]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Da quanto noto sulla monotonia di p_{-1} segue inoltre che f è strettamente decrescente, ad esempio, in $(1,+\infty)$. Ma allora f <u>non può essere monotona</u>. Pertanto non esistono valori di α per i quali f sia monotona.

5) Sia $\alpha \in (-\infty,-3] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Allora f è invertibile e

$$Dom(f^{-1}) = Im(f) = (-1,0) \cup (0,1) \cup \left[\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + 2\right]$$

(cf. (1.6)). Sia ora $y \in Dom(f^{-1})$; determiniamo $f^{-1}(y)$.
Se $y \in (-1,0)\cup(0,1)$, dal punto 1) segue che $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$; se $y \in \left[\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + 2\right]$, dal punto 1) segue che $f^{-1}(y) = \log_2(y-\alpha)$. Pertanto $f^{-1} : (-1,0)\cup(0,1)\cup\left[\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + 2\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ \log_2(x-\alpha) & \text{se } x \in \left[\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + 2\right] \end{cases}.$$

6) Poniamo $\alpha = -\sqrt{2}$. Allora

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - \sqrt{2} & \text{se } |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

Determiniamo $f \circ p_{-1}$. Poiché $Dom(p_{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $Dom(f) = \mathbb{R}$, ne segue che $Dom(f\circ p_{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Inoltre, $\forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$(f\circ p_{-1})(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - \sqrt{2} & \text{se } \left|\frac{1}{x}\right| \le 1 \\ x & \text{se } \left|\frac{1}{x}\right| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - \sqrt{2} & \text{se } \frac{1}{|x|} \le 1 \\ x & \text{se } \frac{1}{|x|} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - \sqrt{2} & \text{se } |x| \ge 1 \\ x & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Pertanto $f\circ p_{-1} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$(f\circ p_{-1})(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ 2^{\frac{1}{x}} - \sqrt{2} & \text{se } x \in (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \end{cases}.$$

Ora determiniamo $p_{-1} \circ f$. Osserviamo innanzitutto che

$$Dom(p_{-1} \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(p_{-1})\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}. \tag{6.1}$$

Poiché $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $2^x - \sqrt{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, da (6.1) si ottiene che

$$Dom(p_{-1} \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} = (-\infty, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty).$$

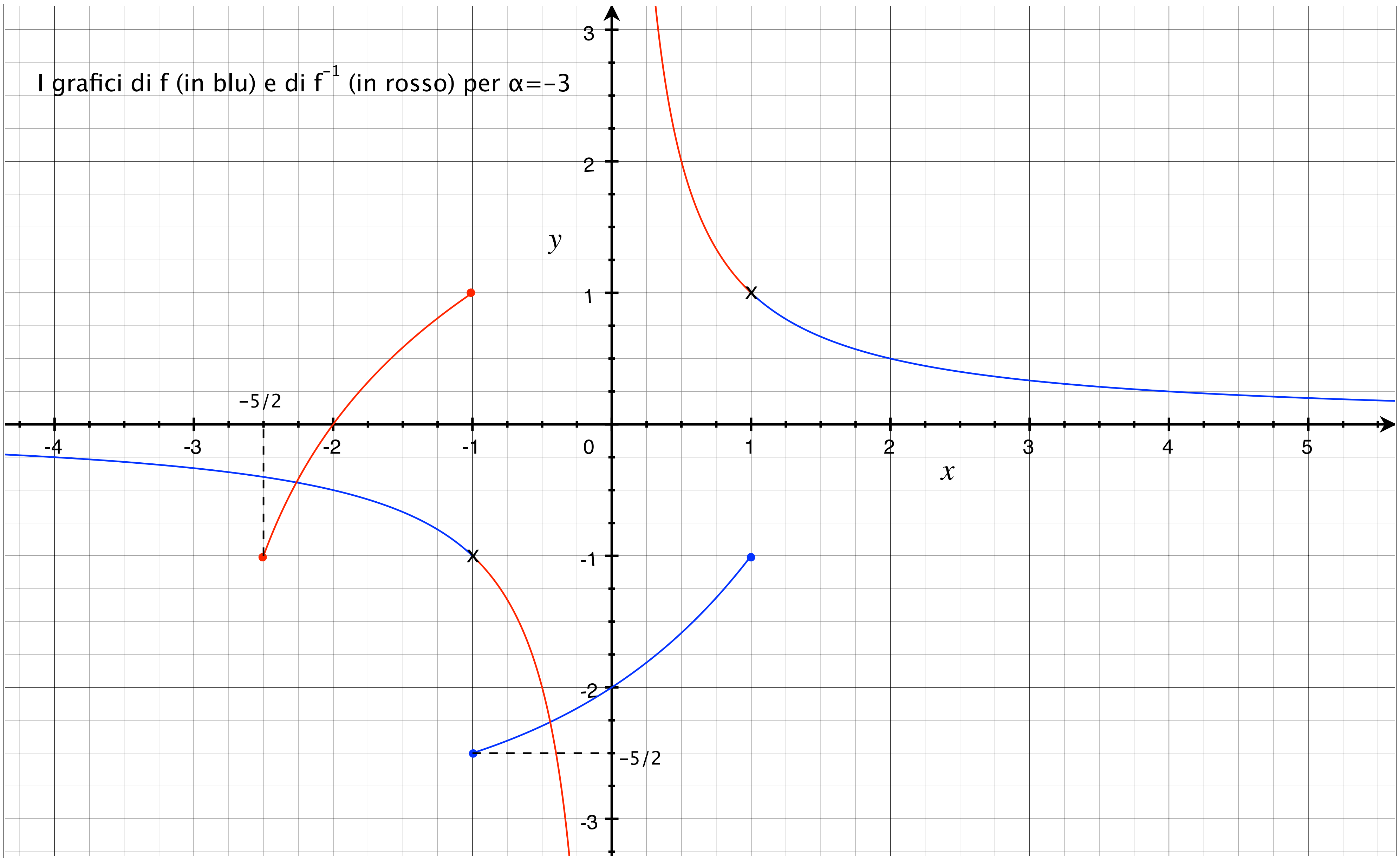
Pertanto $p_{-1} \circ f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$(p_{-1} \circ f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^x - \sqrt{2}} & \text{se } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ x & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}.$$

7) Per $\alpha = -\frac{1}{2}$, da (1.6) segue che

$$Im(f) = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} + 2\right] = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left[0, \tfrac{3}{2}\right] = \left(-1, \tfrac{3}{2}\right].$$

Quindi, per $\alpha = -\frac{1}{2}$, $Im(f)$ è un <u>intervallo</u>.


I grafici di f (in blu) e di f^{-1} (in rosso) per α=−3
−5/2
−5/2
y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
-1
-2
-3