Data la funzione

$$\phi(n) := n^3 + 5n \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

dimostrare che $\phi(n)$ è divisibile per 6, per ogni $n \geq 1$, applicando il principio di induzione.

Svolgimento. Come è noto, per utilizzare il principio di induzione occorre provare che la proprietà che si vuole dimostrare è valida per il primo valore di n che si considera (in questo caso $n = 1$), e poi dimostrare che se la proprietà è vera per un certo generico $n \geq 1$, allora è vera anche per $n + 1$.

Nel nostro caso si ha $\phi(1) = 6$, quindi ovviamente la proprietà richiesta è vera se $n = 1$. Si è quindi verificata la prima parte del principio di induzione; resta da considerare la seconda parte. Supponiamo quindi che sia valida la proprietà per un certo $n \geq 1$, cioè che $\phi(n)$ è divisibile per 6, e cerchiamo di dimostrare che anche $\phi(n + 1)$ lo è.

Ora si ha:

$$\phi(n+1) = (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = \phi(n) + 3n^2 + 3n + 6 = \phi(n) + 3n(n+1) + 6$$

Osserviamo gli addendi nell'ultimo membro. Il primo, $\phi(n)$, è divisibile per 6 per l'ipotesi induttiva. Il secondo è ovviamente divisibile per 3 e anche per 2 perché il prodotto di due numeri interi consecutivi è pari. Il terzo vale 6 quindi è divisibile per 6. Si conclude che la somma cioè $\phi(n + 1)$ è anch'essa divisibile per 6, e la proposizione è dimostrata.

Ci si potrebbe chiedere se sarebbe possibile dimostrare la proposizione direttamente, senza ricorrere al principio di induzione. A tale scopo si può procedere come segue.
Osserviamo intanto che si può scrivere

$$\phi(n) = n(n^2 + 5)$$

dalla quale si vede che $\phi(n)$ è pari (se n è dispari, allora n^2 è pure dispari quindi $n^2 + 5$ è pari). Resta quindi solo da dimostrare che $\phi(n)$ è divisibile per 3.
Ci sono tre casi possibili: o n è divisibile per 3 (nel qual caso la tesi è dimostrata, essendoci n a fattore in $\phi(n)$), o il resto della divisione di n per 3 vale 1, o il resto della divisione di n per 3 vale 2.
Consideriamo il caso in cui la divisione di n per 3 dia per resto 1: allora si ha

$$n = 3k + 1 \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

da cui

$$n^2 + 5 = (3k + 1)^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 1 + 5$$

Essendo questo numero chiaramente divisibile per 3, la proposizione in questo caso è dimostrata.
Resta solo da considerare il caso in cui la divisione di n per 3 dia per resto 2: questa volta si ha

$$n = 3k + 2 \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

da cui

$$n^2 + 5 = (3k + 2)^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 4 + 5$$

Anche questo numero è divisibile per 3, quindi la proposizione è completamente dimostrata. $\square$