Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\sqrt{|\sin t|}}{(2t^2 - \pi t - \pi^2)\sqrt[3]{t - \arctan t}}\, dt$$

a) determinare l'insieme di definizione di f;

b) studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione;

c) studiare l'insieme di derivabilità di f.

Svolgimento. a) Come è noto dalla teoria degli integrali impropri, l'integrale dato $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ sarà convergente per tutti i valori di x per i quali l'integranda $g(t) = \sqrt{|\sin t|}/(2t^2 - \pi t - \pi^2)\sqrt[3]{t - \arctan t}$ o è definita e continua nell'interavllo $[0, x]$, o è prolungabile per continuità negli eventuali punti di $[0, x]$ dove essa non è definita, oppure infine converge l'integrale improprio di g tra 0 e x, se la g in qualche punto di tale intervallo non è definita né si può prolungare per continità.

In pratica occorre vedere come si comporta l'integranda g in un intorno di 0 e poi nelle vicinanze degli altri punti in cui essa non è definita. Cominciamo dunque a studiare l'insieme di definizione dell'integranda $g(t)$. Occorre escludere i punti dove si annulla il denominatore, cioè i punti $0, -\pi/2, \pi$, quindi si ha $I_g = (-\infty, -\pi/2) \cup (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, +\infty)$.

Vediamo come si comporta l'integranda g in un intorno di questi tre punti, cominiciando dall'origine. Si osserva che il numeratore di g si annulla, come il denominatore, per $t = 0$; ricorrendo alla teoria degli ordini di infinitesimo, si osserva facilmente che il numeratore di g è infinitesimo, per $t \to 0$, di ordine $1/2$, mentre il denominatore è infinitesimo di ordine 1 (in quanto la funzione $t - \arctan t$ è infinitesima di ordine 3, quindi tenendo conto della radice cubica, l'ordine di infinitesimo del denominatore è 1). Poiché l'ordine di infinitesimo del denominatore è maggiore dell'ordine di infinitesimo del numeratore (per $t \to 0$), ne segue (studiando i segni della funzione) che si ha $\lim_{t\to 0^+} g(t) = -\infty$, $\lim_{t\to 0^-} g(t) = +\infty$, entrambi di ordine $1/2$ (differenza degli ordini di infinitesimo del numeratore e del denominatore). Poiché $1/2 < 1$, si può concludere, per noti teoremi, che la funzione integrale $f(x)$ è definita per x appartenente ad un opportuno intorno do 0, sia a destra sia a sinistra di 0.

Procediamo ora a studiare la funzione integranda g nelle vicinanze degli altri punti dove essa non è definita. Nel punto $-\pi/2$ il denominatore si annulla, mentre non si annulla il numeratore. Più precisamente, $\lim_{t\to -\pi/2^+} g(t) = +\infty$ di ordine 1 (in quanto, come facilmente si verifica, il denominatore è infinitesimo, per $t \to -\pi/2$, di ordine 1). Si può quindi concludere, per noti teoremi, che l'integrale improprio $\int_0^{-\pi/2} g(t)\, dt$ diverge negativamente, cioè $\lim_{x\to -\pi/2^+} f(x) = -\infty$, da cui $-\pi/2 \notin I_f$.

Passiamo infine a studiare il comportamento di g in un intorno del punto π. In tale punto il denominatore di g si annulla (di ordine 1), mentre pure il numeratore si annulla (di ordine $1/2$. tenendo conto della radice quadrata). Ne segue che $\lim_{t\to\pi^-} g(t) = -\infty$, $\lim_{t\to\pi^+} g(t) = +\infty$, entrambi di ordine $1/2$ (che è la differenza tra l'ordine di infinitesimo del denominatore e l'ordine di infinitesimo del numeratore). Poiché l'ordine di infinito dell'integranda nel punto π è minore di 1, per noti teoremi l'integrale improprio $\int_0^{\pi} g(t)\, dt$ è convergente e pertanto $\pi \in I_f$. Anche i punti $x \in (\pi, +\infty)$ appartengono ad I_f, in quanto in tale intervallo la funzione integranda g è continua e, come si è visto, l'integrale improprio di g converge anche a destra del punto π. Abbiamo ora tutti gli elementi per concludere che $I_f = (-\pi/2, +\infty)$.

b) Si è già osservato che $\lim_{x\to -\pi/2^+} f(x) = -\infty$ in quanto l'integrale improprio $\int_0^{-\pi/2} g(t)\,dt$ diverge negativamente. Resta quindi da studiare solo il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Come è noto dalla teoria, tale limite esiste reale se e solo se converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$. Per studiare la convergenza di questo integrale, basta osservare che la funzione integranda si lascia maggiorare, in modulo, dalla funzione $1/|(2t^2 - \pi t - \pi^2)\sqrt[3]{t - \arctan t}|$ la quale tende a 0, per $t \to +\infty$, di ordine $7/3 > 1$. Ciò basta ad assicurare la convergenza del suddetto integrale improprio, per cui si può affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

c) Per studiare la derivabilità della funzione f, basta ricordare che, per noti teoremi, essa è certamente derivabile nei punti dove l'integranda g è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti di I_f nei quali i limiti destro e sinistro dell'integranda sono infiniti o tra loro diversi. Se ne deduce che, nel nostro caso, f non è derivabile nei punti 0 e π, poiché si è visto che l'integranda in tali punti tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

In conclusione l'insieme di derivabilità di f è: $I_{f'} = (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi. + \infty)$. $\square$