Siano date le funzioni

$$g(t) := \frac{|t|(t-\pi)}{\sqrt[3]{t-1}\,\sin t}, \qquad f(x) := \int_0^x g(t)\,dt$$

a) Secondo la teoria degli integrali impropri, determinare l'insieme di definizione di f;

b) determinare gli insiemi di continuità e di derivabilità di f;

c) determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e/o assoluto di f.

Svolgimentro. a) Come è noto, in questi problemi conviene iniziare studiando l'insieme di definizione dell'integranda g. Mentre il numeratore di g è sempre definito, si osserva che il denominatore si annulla nei punti 1 e $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), quindi indicando con I_g l'insieme di definizione di g si ha

$$I_g = \{t \in \mathbb{R} :\ t \neq 1,\ t \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Osserviamo pure che la funzione g è continua dove è definita. Poiché 0, estremo fisso dell'integrale che definisce f, è uno dei punti in cui g non è definita, conviene calcolare i limiti destro e sinistro di g in tale punto. Con facili calcoli otteniamo

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = -\pi, \qquad \lim_{t\to 0^+} g(t) = \pi$$

da cui segue la convergenza dell'integrale (neppure improprio) che definisce la f sia se $x \in (-\pi, 0]$ sia se $x \in [0, 1)$; l'integranda g è infatti evidentemente prolungabile per continuità in ciascuno di questi due intervalli (non nella loro unione). Possiamo intanto dire quindi che, indicando con I_f l'insieme di definizione di f, si ha

$$(-\pi, 1) \subset I_f$$

Per proseguire lo studio, dobbiamo ora vedere come si comporta l'integranda ad esempio in un intorno del punto $-\pi$, che è il primo punto che si incontra a sinistra di 0 nel quale g non è definita. Risulta evidentemente

$$\lim_{t\to -\pi^+} g(t) = -\infty$$

quindi l'integrale $\int_0^{-\pi} g(t)\,dt$ è improprio e dobbiamo capire se converge o no.
Con facili calcoli si può vedere che l'integranda tende a $-\infty$, per $t \to -\pi^+$, di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $\pi - t$; per la teoria degli integrali impropri abbiamo allora che l'integrale improprio di cui sopra diverge (positivamente) e quindi $-\pi \notin I_f$. A questo punto non avrebbe più senso studiare l'eventuale convergenza dell'integrale improprio per le x minori di $-\pi$.
Passiamo ora a studiare il comportamento dell'integranda nel primo punto a destra di 0 in cui la g non è definita, cioè nel punto 1. Un facile calcolo mostra che

$$\lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to 1^+} g(t) = -\infty,$$

e l'ordine di infinito è evidentemente $1/3$ sia da destra sia da sinistra. Per noti teoremi abbiamo quindi che l'integrale improprio della g è convergente (perché $1/3 < 1$) sia quando x vale 1 sia quando si trova in un intorno destro di 1 (purché sia $x < \pi$). Per i calcoli fatti finora possiamo pertanto affermare che

$$(-\pi, \pi) \subset I_f$$

Il prossimo passo sarà studiare il comportamento di g nel prossimo punto a destra di 1 in cui g non è definita, cioè il punto π. Si ha, con facili calcoli:

$$\lim_{t\to\pi} g(t) = -\frac{\pi}{\sqrt[3]{\pi - 1}}$$

cioè la funzione g è prolungabile per continuità nel punto π, quindi la funzione integrale è f definita anche in π e nei punti a destra di esso (fino ad arrivare a 2π escluso). Procedendo allo stesso modo, dobbiamo studiare il comportamento della funzione g in un intorno del prossimo punto a destra di π in cui essa non è definita, cioè in 2π. Risulta banalmente

$$\lim_{t\to 2\pi^-} g(t) = -\infty$$

e l'ordine di infinito è evidentemente 1, in quanto l'unico fattore che si annulla nel punto 2π è $\sin t$ al denominatore. Per noti teoremi quindi l'integrale improprio nel punto 2π diverge (negativamente) e a questo punto si può concludere che l'insieme di definizione delle funzione f è

$$I_f = (-\pi, 2\pi)$$

b) Come tutte le funzioni integrali del tipo che stiamo studiando, la funzione integrale f è continua dove è definita (ciò segue subito dalla teoria degli integrali impropri). Consideriamo ora la derivabilità di f: sempre per la teoria degli integrali impropri, e per noti teoremi, f è derivabile almeno nei punti in cui l'integranda è continua o prolungabile per continuità. Resta quindi da studiare l'eventuale derivabilità della funzione f solo nei punti 0 e 1 nei quali la funzione g non è definita e non è prolungabile per continuità. Per quanto riguarda il punto 0, si è visto che in tale punto l'integranda g ha limiti destro e sinistro reali e diversi tra loro (cioè ammette in questo punto una discontinuità di prima specie). Allora f non può essere derivabile nel punto 0, perchè (corollario del teorema di Lagrange) sono pure diversi tra loro i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale (si può dire che f ammette in 0 un punto angoloso).
Passiamo ora a studiare l'eventuale derivabilità di f nel punto 1. Si è visto che il tale punto l'integranda ammette limiti destro e sinistro che valgono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$; sempre per il già citato corollario del teorema di Lagrange tali sono pure i limiti del rapporto incrementale di f in tale punto. Si conclude che anche nel punto 1 la funzione f non è derivabile, quindi l'insieme di derivabilità di f è

$$I'_f = (-\pi, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2\pi)$$

c) Un semplice esame dei vari fattori che intervengono nella definizione di g, e tenendo presente che dove g è definita e continua si ha $f'(x) = g(x)$, si può facilmente concludere che:

f è strettamente decrescente in $(-\pi, 0]$;
f è strettamente crescente in $[0, 1]$;
f è strettamente decrescente in $[1, 2\pi)$.

Possiamo quindi concludere che la funzione f ammette nel punto 0 un punto di minimo relativo, e nel punto 1 un punto di massimo relativo. Non esistono evidentemente punti di massimo o minimo assoluto in quanto, come si è visto,

$$\lim_{x\to -\pi^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = -\infty$$