Siano date le funzioni

$$g(t) := \frac{\ln|t|}{\sqrt[3]{e^t - e^3}\,\ln|t+2|}, \qquad f(x) := \int_1^x g(t)\,dt$$

a) Sulla base della teoria degli integrali impropri, determinare I_f, insieme di definizione di f;

b) determinare l'insieme di derivabilità di f;

c) stabilire se esistono i limiti di f agli estremi di I_f, ed in caso affermativo stabilire se sono reali o valgono $+\infty$ o $-\infty$.

Svolgimento. a) Come è noto, la funzione integrale f è definita in tutti i punti x per i quali l'integranda g è definita e continua nell'intervallo (chiuso) di integrazione, oppure, se l'integranda non è definita o non è continua in qualche punto dell'intervallo di integrazione, almeno l'integrale in senso improprio è convergente.

Ne segue che conviene innanzi tutto studiare l'insieme di definizione e di continuità della funzione integranda, che nel nostro caso è

$$g(t) := \frac{\ln|t|}{\sqrt[3]{e^t - e^3}\,\ln|t+2|}$$

Osserviamo che il numeratore di questa frazione è definito se $t \neq 0$, mentre il denominatore non è definito se $t = -2$ e si annulla quando $t \in \{-3, -1, 3\}$. Allora l'insieme di definizione dell'integranda g è il seguente:

$$I_g := \mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1,0,3\} = (-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$$

Si osserva pure banalmente che l'integranda g è continua dove è definita (essendo prodotto, quoziente o composta di funzioni continue), e che 1 (estremo fisso dell'integrale) appartiene all'intervallo $(0,3)$. Pertanto se è anche $x \in (0,3)$, si ha $[1,x] \subset (0,3)$, da cui, per la continuità della funzione g in $[1,x]$, si può concludere che $x \in I_f$. In altre parole possiamo intanto dire che

$$(0,3) \subset I_f$$

Spostiamoci ora dal punto 1 (estremo fisso della funzione integrale) verso destra, fino al punto 3 nel quale la funzione integranda non è definita. Cominciamo calcolando il limite di $g(t)$ per t che tende a 3 da sinistra: risulta banalmente

$$\lim_{t\to 3^-} g(t) = -\infty$$

in quanto il denominatore di g tende a zero mantenendosi negativo, mentre il numeratore tende ad un numero positivo. Ne segue che l'integrale $\int_1^3 g(t)\,dt$ è improprio, e occorre stabilire se converge o no. A tale scopo può servire un noto criterio di convergenza, che si basa sul calcolo dell'eventuale ordine di infinito dell'integranda, nel nostro caso per t che tende a 3 (da sinistra). È facile verificare che tale ordine vale $1/3$, ed essendo tale numero minore di 1, possiamo concludere che l'integrale improprio $\int_1^3 g(t)\,dt$ è convergente, per cui è anche $3 \in I_f$.

Si pone allora il problema di stabilire se possiamo spostarci ancora a destra del punto 3 rimanendo all'interno di I_f, cioè se è anche $(3, +\infty) \subset I_f$. A tale scopo è utile considerare anche il limite di $g(t)$ per t che tende a 3 da destra: abbiamo

$$\lim_{t \to 3^+} g(t) = +\infty$$

ancora di ordine 1/3 (come in precedenza per il limite sinistro). Ciò implica, per il già citato criterio di convergenza, che converge anche l'integrale improprio $\int_3^x g(t)\, dt$ se $x > 3$, e quindi che $x \in I_f$ per gli stessi valori di x. Fino a questo punto possiamo pertanto affermare che $(0, +\infty) \subset I_f$.

Occorre ora studiare il comportamento della funzione g in un intorno dei punti, a sinistra di 1, dove non essa è definita. Muovendoci dunque da 1 verso valori inferiori, il primo punto da considerare è 0, in quanto g non è definita in tale punto e risulta

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty$$

Ne segue che l'integrale $\int_1^0 g(t)\, dt$ è improprio e occorre stabilire se converge o meno. Procedendo come in precedenza, utilizziamo il criterio di convergenza dell'ordine di infinito e osserviamo che l'ultimo limite scritto tende a $+\infty$ di ordine inferiore a qualunque potenza dell'infinito campione $1/|t|$ (infatti, mentre il denominatore tende ad un numero reale negativo, il numeratore tende a $-\infty$ di ordine "logaritmico", cioè molto basso). Ciò basta per affermare che l'integrale improprio $\int_1^0 g(t)\, dt$ è convergente e quindi anche $0 \in I_f$.

Spostandosi ancora a sinistra del punto 0 osserviamo che converge pure l'integrale improprio $\int_0^x g(t)\, dt$ se $x \in (-1, 0)$ e quindi anche $(-1, +\infty) \subset I_f$ (infatti l'ordine di infinito di $g(t)$ per $t \to 0$ da sinistra è lo stesso che da destra).

Spostandoci ancora a sinistra, arriviamo al punto -1, quindi dobbiamo studiare il $\lim_{t \to -1} g(t)$, che si presenta sotto la forma indeterminata 0/0. Con facili calcoli, adoperando i limiti notevoli o il teorema di De L'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{t \to -1} \frac{\ln |t|}{\sqrt[3]{e^t - e^3} \ln |t+2|} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^3 - 1/e}}$$

Pertanto la funzione g, ammettendo limite reale per t che tende a -1, è prolungabile per continuità in tale punto; ne segue che la funzione integrale si comporta esattamente come se la funzione g fosse definita e continua anche nel punto -1. Allora la funzione integrale è definita anche nel punto -1 e nei punti a sinistra di esso, purché sia $x > -2$.

Procedendo come in precedenza, e spostandoco ancora a sinistra, dobbiamo ora studiare l'integranda g nel punto -2. In questo caso si ha banalmente

$$\lim_{t \to -2} \frac{\ln |t|}{\sqrt[3]{e^t - e^3} \ln |t+2|} = 0$$

(in quanto il numeratore tende ad un numero positivo, mentre il denominatore tende a $+\infty$). Allora di nuovo l'integranda è prolungabile per continuità nel punto -2, e la funzione integrale f è definita nche in -2 e nei punti $x \in (-3, -2)$.

Resta infine da studiare l'integranda nel punto -3. Questa volta si ha

$$\lim_{t \to -3^+} \frac{\ln|t|}{\sqrt[3]{e^t - e^3}\ln|t+2|} = +\infty$$

in quanto il logaritmo che si presenta al denominatore è infinitesimo, mentre gli altri fattori tendono a numeri diversi da zero. Un facile calcolo mostra che l'ordine di infinito in questo caso vale 1 (perché il logaritmo al denominatore è infinitesimo di ordine 1), quindi per i noti criteri l'integrale improprio nel punto -3 è divergente (negativamente).

Possiamo finalmente concludere che l'insieme di definizione della funzione integrale f è

$$I_f = (-3, +\infty)$$

.

b) Per quanto riguarda l'insieme di derivabilità di f, come è noto la funzione integrale è derivabile in tutti i punti in cui l'integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti nei quali i limiti destro e/o sinistro dell'integranda valgono $+\infty$ o $-\infty$. Dall'analisi precedentemente fatta sul comportamento della funzione integranda, segue quindi che l'insieme di derivabilità di f è il seguente:

$$I'_f = (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$$

cioè abbiamo tolto i punti 0 e 3 perché in essi i limiti dell'integranda (destro e sinistro) sono infiniti, anche se l'integrale improprio converge e quindi in essi la f è definita.

c) Per quanto ottenuto in precedenza, i limiti da studiare sono i seguenti:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Per quanto riguarda il primo, si è già visto che $\lim_{t \to -3^+} g(t) = +\infty$ di ordine 1, quindi l'integrale improprio nel punto 3 diverge negativamente, cioè il primo limite da calcolare vale $-\infty$ (il segno meno deriva dal fatto che l'intervallo di integrazione è orientato in modo contrario al naturale).

Per quanto riguarda il secondo limite, possiamo usare un criterio di convergenza per gli integrali impropri sugli intervalli non limitati: l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} g(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

è convergente ad esempio se l'integranda g è infinitesima, per t che tende a $+\infty$, di ordine superiore a 1. Nel nostro caso l'integranda è infinitesima, per t che tende a $+\infty$, di ordine superiore a qualunque potenza di $1/t$, a causa dell'esponenziale al denominatore. Si conclude che il secondo limite da studiare è reale. $\square$