Sia α un parametro reale e siano date le funzioni

$$f_\alpha(x) := \int_1^x g_\alpha(t)\,dt, \qquad g_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{\sin(1/t)}{\ln|t|} & \text{se } t < 0 \\ \dfrac{e^t - \alpha}{\sqrt[3]{\arctan t - \pi/4}} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Sulla base della teoria degli integrali impropri, rispondere alle seguenti domande al variare del parametro α:

(a) *determinare l'insieme di definizione D_α di f_α;*
(b) *determinare l'insieme dei punti di derivabilità di f_α;*
(c) *stabilire se esiste $f''_\alpha(0)$;*
(d) *stabilire se esistono i limiti di f_α agli estremi di D_α, precisando, in caso di esistenza, se sono finiti oppure no;*
(e) *stabilire se f_α è monotona in D_α.*

Svolgimento. a) Iniziamo studiando l'insieme di definizione dell'integranda g_α. Il numeratore e il denominatore sono funzioni evidentemente sempre definite, mentre dovremo togliere, dall'insieme di definizione di g_α, gli eventuali punti in cui si annulla il denominatore. Si verifica subito che per $t < 0$ il denominatore si annulla nel punto -1, mentre per $t \geq 0$ esso si annulla per $t = 1$; osserviamo anche che l'integranda g_α è continua dove è definita, salvo eventualmente nel punto 0. Passiamo a questo punto allo studio della funzione integrale f_α: poiché l'integrale parte dal punto 1, essa è certamente definita in tale punto e $f_\alpha(1) = 0$. Assumiamo ora (ad esempio) $x > 1$ e vediamo se f_α è definita in tale punto. Osserviamo che $\lim_{t\to 1^+} g_\alpha(t)$ potrebbe essere infinito quindi l'integrale che definisce $f_\alpha(x)$ potrebbe essere improprio.
Più precisamente si ha

$$\lim_{t\to 1^+} g_\alpha(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < e \\ 0 & \text{se } \alpha = e \\ -\infty & \text{se } \alpha > e \end{cases}$$

e possiamo anche osservare che, nel caso $\alpha = e$, la funzione g_e è infinitesima nel punto 1 di ordine $2/3$ (in quanto il numeratore è infinitesimo di ordine 1, mentre il denominatore è infinitesimo di ordine $1/3$). Da ciò segue che se $\alpha = e$ l'integranda è prolungabile per continuità nel punto 1, quindi l'integrale che definisce $f_\alpha(x)$ in questo caso è ben definito (non è neppure improprio). Se invece $\alpha \neq e$ l'integrale che definisce $f_\alpha(x)$ è improprio ed occorre capire se converge o meno. Si vede subito che, per tali α, il numeratore tende ad un numero reale diverso da 0, mentre il denominatore tende a 0 di ordine $1/3$. L'integranda quindi tende a $+\infty$ o a $-\infty$ (a seconda che sia $\alpha < e$ o $\alpha > e$) di ordine $1/3$ e l'integrale improprio converge. Si conclude allora che se $x > 1$ la funzione $f_\alpha(x)$ è ben definita, qualunque sia il valore di α; possiamo dire, fino ad ora, che $[1, +\infty) \subset D_\alpha$.

Muoviamoci ora a sinistra del punto 1; si ha che

$$\lim_{t\to 1^-} g_\alpha(t) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < e \\ 0 & \text{se } \alpha = e \\ +\infty & \text{se } \alpha > e \end{cases}$$

analogamente a quanto accadeva per il limite per $t \to 1$ da destra; pertanto anche se $x \in (0,1)$ si ha $x \in D_\alpha$ essendo convergente l'integrale $\int_1^x g_\alpha(t)\,dt$. Passiamo ora a studiare cosa accade per $x = 0$. Si ha evidentemente

$$\lim_{t\to 0^+} g_\alpha(t) = g_\alpha(0) = \frac{\alpha - 1}{\sqrt[3]{\pi/4}}$$

essendo la funzione $t \to \dfrac{e^t - \alpha}{\sqrt[3]{\arctan t - \pi/4}}$ continua in 0; ciò implica che anche il punto 0 appartiene a D_α in quanto l'integrale (eventualmente improprio) che definisce $f_\alpha(0)$ è convergente.

Possiamo allora continuare a muoverci a sinistra di 0; sia ora $x \in (-1,0)$ e vediamo se converge l'integrale che definisce $f_\alpha(x)$: basterà studiare la convergenza dell'integrale $\int_0^x g_\alpha(t)\,dt$. Serve a questo punto calcolare il seguente limite:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(1/t)}{\ln|t|} = 0$$

(in quanto il denominatore tende a $-\infty$ mentre il numeratore è limitato, essendo $|\sin(1/t)| \le 1 \; \forall t \neq 0$). Ciò basta a concludere che l'ultimo integrale scritto converge e quindi anche $(-1,0) \subset D_\alpha$. Continuando a muoverci verso sinistra, occorre ora vedere che cosa succede in un intorno (destro, per ora) del punto -1. Si ha evidentemente

$$\lim_{t\to -1^+} \frac{\sin(1/t)}{\ln|t|} = +\infty$$

in quanto il numeratore tende a $-\sin 1$ (che è un numero negativo) mentre il denominatore tende a 0 per valori negativi. L'integrale $\int_0^{-1} g_\alpha(t)\,dt$ è quindi improprio, ed occorre capire se converge o meno. A tale scopo si può osservare che la funzione $t \to \frac{\sin(1/t)}{\ln|t|}$ tende a $+\infty$, per $t \to -1^+$, di ordine 1 (si può verificare facilmente questo fatto osservando che il denominatore $t \to \ln(-t)$ è una funzione infinitesima di ordine 1 per $t \to -1$, mentre il numeratore tende ad un numero reale diverso da 0). Ciò basta a concludere che l'integrale improprio $\int_0^{-1} g_\alpha(t)\,dt$ diverge (negativamente), e infine possiamo dire che

$$D_\alpha = (-1, +\infty)$$

(Si noti che tale insieme di definizione non dipende dal parametro α).

b) Studiamo ora l'insieme di derivabilità di f_α; per noti teoremi la funzione integrale è derivabile in tutti i punti in cui l'integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile (ad esempio) nei punti in cui l'integranda tende, da destra o da sinistra, a $+\infty$ o a $-\infty$, oppure ha una discontinuità di prima specie. Dallo studio effettuato finora, si vede che i punti in cui la funzione f_α potrebbe non essere derivabile sono solo 0 e 1, in quanto in tutti gli altri punti di D_α l'integranda è continua.

Per quanto riguarda il punto 1, si è visto che in tale punto l'integranda è prolungabile per continuità se $\alpha = e$, mentre tende (da destra o da sinistra) a $+\infty$ o a $-\infty$ se $\alpha \neq e$. Da ciò segue che la funzione f_α è derivabile nel punto 1 se e solo se $\alpha = e$, mentre non è derivabile se $\alpha \neq e$.

Andiamo ora a studiare l'eventuale derivabilità della funzione f_α nel punto 0. Si è già visto, a tale proposito, che

$$\lim_{t\to 0^+} g_\alpha(t) = g_\alpha(0) = \frac{\alpha - 1}{\sqrt[3]{\pi/4}}, \qquad \lim_{t\to 0^-} g_\alpha(t) = 0$$

da cui segue immediatamente che g_α è continua in 0 se e solo se $\alpha = 1$, mentre ha una discontinuità di prima specie in tale punto se $\alpha \neq 1$. Si conclude che l'insieme di derivabilità della funzione f_α è il seguente:

$$D'_\alpha = \begin{cases} (-1,1) \cup (1,+\infty) & \text{se } \alpha = 1 \\ (-1,0) \cup (0,+\infty) & \text{se } \alpha = e \\ (-1,0) \cup (0,1) \cup (1+\infty) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Come è noto, la derivata seconda non è altro che la derivata della derivata prima. Ne segue che la richiesta $f''_\alpha(0)$ potrà esistere solo se esiste $f'_\alpha(0)$, quindi (vedi risposta precedente) se $\alpha = 1$; in questo caso è $f'_1(0) = 0$. Per stabilire se esiste $f''_1(0)$, andiamo a scrivere il rapporto incrementale della funzione f'_1 relativo al punto 0, cominciando dal caso $t < 0$:

$$\frac{f'_1(t) - f'_1(0)}{t} = \frac{\sin(1/t)}{t \ln|t|}$$

Ora si vede subito che tale rapporto non ammette limite per $t \to 0^-$, in quanto il denominatore tende a 0, mentre il numeratore fa infinite oscillazioni in ogni intorno sinistro di 0, assumendo infinite volte i valori $0,\ 1,\ -1$. Ciò basta a concludere che non esiste $f''_1(0)$, non essendoci bisogno di considerare che cosa accade per $t > 0$. Si risponde pertanto che la richiesta $f''_\alpha(0)$ non esiste per nessun valore di α.

d) Si è visto che l'integrale improprio $\int_1^{-1} g_\alpha(t)\,dt$ diverge negativamente, quindi (per definizione)

$$\lim_{x\to -1^+} f_\alpha(x) = -\infty$$

Per studiare il comportamento della funzione f_α per $x \to +\infty$ conviene calcolare innanzitutto il limite dell'integranda:

$$\lim_{t\to +\infty} g_\alpha(t) = +\infty$$

in quanto il numeratore tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $\sqrt[3]{\pi/4}$. Pertanto si ha, per noti teoremi, che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} g_\alpha(t)\,dt$ diverge positivamente e quindi (ancora per definizione)

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$$

e) Si è già osservato che l' integranda cambia segno infinite volte in ogni intorno sinistro di 0, quindi, per noti teoremi, ci sono infiniti intervalli in cui f_α è strettamente crescente e infiniti intervalli in cui essa è strettamente decrescente: si conclude che essa non è mai monotona in D_α (qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$). $\square$

(Ringrazio il prof. Gianfranco Bottaro che ha letto questo svolgimento e ha suggerito alcuni miglioramenti all' esposizione).