

Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_3^x \frac{\sqrt[3]{\log |t-1|}}{(|t| + \sin t) \sqrt[5]{(e^t - e^2)^6}} dt$$

- a) determinare l'insieme di definizione di f ;
- b) studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione;
- c) studiare l'insieme di derivabilità di f .

Svolgimento. a) Come è noto dalla teoria degli integrali impropri, la funzione integrale data $f(x) := \int_3^x g(t) dt$ è definita in tutti i punti x per i quali l'integranda $g(t) := \frac{\sqrt[3]{\log |t-1|}}{(|t| + \sin t) \sqrt[5]{(e^t - e^2)^6}}$ o è definita e continua nell'intervallo $[3, x]$, o è prolungabile per continuità negli eventuali punti di $[3, x]$ dove essa non è definita, oppure infine converge l'integrale improprio di g tra 3 e x , se la g in qualche punto di tale intervallo non è definita né si può prolungare per continuità.

In pratica occorre vedere come si comporta l'integranda g in un intorno di 3 (punto iniziale della funzione integrale) e poi nelle vicinanze degli altri punti in cui essa non è definita (si osservi che, come spesso accade, l'integranda è continua in tutti i punti dove essa è definita). Cominciamo dunque a studiare l'insieme di definizione dell'integranda g ; occorre escludere i punti dove si annulla il denominatore, cioè i punti 0, 2, e anche il punto 1 nel quale non è definito il logaritmo al numeratore. Si ha pertanto $I_g = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

La funzione g è definita e continua in un intorno di 3, e così pure in tutti i punti $x > 3$; si può quindi già dire che $[3, +\infty) \subset I_f$ (essendo I_f l'insieme di definizione di f).

L'integranda è pure continua in tutti i punti $x \in (2, 3]$, quindi si può anche dire che tale intervallo è contenuto in I_f . Per proseguire nello studio di tale insieme, facendo decrescere x , dobbiamo verificare che cosa accade nel punto 2. Si vede facilmente che il numeratore di g cioè $\sqrt[3]{\log |t-1|}$ tende a 0, per $t \rightarrow 2$, di ordine $1/3$, mentre al denominatore il fattore $t + \sin t$ tende ad un numero reale diverso da 0, e l'altro fattore $\sqrt[5]{(e^t - e^2)^6}$ tende a 0 di ordine $6/5$. Essendo $0 < 6/5 - 1/3 = 13/15 < 1$, si conclude che l'integranda g tende, per $t \rightarrow 2$, a $+\infty$ o $-\infty$ di ordine $13/15$, e pertanto l'integrale improprio $\int_3^x g(t) dt$ converge quando x è in un intorno di 2. A questo punto, in base a quanto finora visto, possiamo concludere che $(x, +\infty) \subset I_f$ per ogni $x \in (1, +\infty)$, essendo g continua in $(1, 2)$. Possiamo arrivare al punto 1? Si può osservare che $\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt[3]{\log |t-1|} = -\infty$ di ordine inferiore a qualunque potenza dell'infinito campione $1/|t-1|$, mentre il denominatore di g ha per limite, per t che tende a 1, un numero reale non nullo (più precisamente positivo). In questa situazione si può dire che la funzione $g(t)$ tende,

per $t \rightarrow 1$, a $-\infty$ di ordine basso (inferiore a qualunque potenza di $1/|t-1|$), quindi l'integrale improprio $\int_3^x g(t) dt$ sarà convergente per $x = 1$ e per gli x abbastanza vicini ad 1. A questo punto possiamo concludere che $(x, +\infty) \subset I_f$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, essendo g continua in $(0, 1)$. Possiamo arrivare al punto 0? Vediamo come si comporta l'integranda g in un intorno dell'origine; data la presenza del modulo di t , è necessario distinguere i casi $t > 0$ e $t < 0$. Se $t > 0$ si ha $|t| = t$ quindi l'integranda assume l'espressione $\frac{\sqrt[3]{\log|t-1|}}{(t+\sin t)\sqrt[5]{(e^t-e^2)^6}}$; con facili calcoli si stabilisce che per $t \rightarrow 0^+$ il numeratore tende a 0 di ordine $1/3$ mentre il denominatore tende a 0 di ordine 1. In questa situazione il rapporto $g(t)$ tende a $+\infty$ o $-\infty$ (per t che tende a 0 da destra) di ordine $1 - 1/3 = 2/3 < 1$. Si conclude che, per noti teoremi, se $x \in (0, 1)$ l'integrale improprio $\int_0^x g(t) dt$ converge e quindi si può già dire che $0 \in I_f$.

Per capire se possono esserci in I_f anche punti $x < 0$, occorre considerare il comportamento dell'integranda g per $t \rightarrow 0^-$. Se $t < 0$ l'integranda assume la forma $\frac{\sqrt[3]{\log|t-1|}}{(-t+\sin t)\sqrt[5]{(e^t-e^2)^6}}$ (in quanto, se $t < 0$, è $|t| = -t$). Procedendo come prima si verifica facilmente che per $t \rightarrow 0^-$ il numeratore tende a 0 sempre di ordine $1/3$, mentre il denominatore tende a 0 di ordine 3. Questa volta quindi il rapporto $g(t)$ tende, per $t \rightarrow 0^-$, a $+\infty$ o $-\infty$ di ordine $3 - 1/3 = 8/3 > 1$. Si conclude che, per noti teoremi, l'integrale improprio $\int_0^x g(t) dt$ quando $x < 0$ diverge (positivamente o negativamente), quindi tali x non possono appartenere all'insieme di definizione di f . Ciò permette di rispondere alla prima domanda: $I_f = [0, +\infty)$.

b) Occorre studiare i limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Per quanto riguarda il primo, si è già osservato che è convergente l'integrale $\int_0^x g(t) dt$ per ogni $x > 0$, pertanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda il secondo, si ha per definizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_3^{+\infty} g(t) dt$, quindi occorre stabilire se questo ultimo integrale improprio è convergente o meno. Ora è facile convincersi che, a causa dell'esponenziale a denominatore, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ di ordine superiore a qualunque potenza di $1/t$. Ciò basta a concludere che l'integrale improprio $\int_3^{+\infty} g(t) dt$ è convergente, e quindi che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$.

c) Come è noto, la funzione integrale f è derivabile in tutti i punti in cui l'integranda g è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti in cui l'integranda tende a (+ o -) infinito, da destra o da sinistra. Poiché $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = -\infty$, la f non è derivabile in 0 (essendo f definita solo per $x \geq 0$ si sarebbe comunque trattato solo di derivata destra). Si è anche visto che $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = +\infty$, quindi f non è derivabile nel punto 1. Infine anche nel

punto 2 si ha $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = +\infty$, quindi f non è derivabile nemmeno nel punto 2. Si conclude che l'insieme di derivabilità I'_f di f è $I'_f = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.