Sia k un parametro reale e sia data la funzione

$$f(x) := \frac{\pi/2 - \arctan x}{\sqrt{kx - \arctan x - \log(1+x)}}$$

a) determinare gli eventuali valori del parametro k per i quali la funzione sia definita almeno in $(0, +\infty)$;

b) per i valori di k di cui al punto precedente, studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Svolgimento. a) La funzione f è definita solo nei punti in cui il radicando al denominatore è positivo (il numeratore è sempre definito). Conviene dunque studiare a parte la funzione

$$\phi(x) := kx - \arctan x - \log(1+x)$$

allo scopo di determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali tale funzione sia positiva (almeno) in $(0, +\infty)$. Per tali valori, la funzione f sarà ben definita in $(0, +\infty)$.

La funzione ϕ , definita in $(-1, +\infty)$ e ivi di classe C^∞ , è tale che

$$\phi'(x) = k - 1/(1+x^2) - 1/(1+x) \quad \forall x \in (-1, +\infty)$$

Risulta evidentemente $\phi'(0) = k - 2$, quindi se $k < 2$ è $\phi'(0) < 0$ e la ϕ è decrescente in un intorno di 0 (si osservi infatti che, essendo ϕ' continua, essa è negativa in un intorno di 0 se lo è nel punto 0, per il teorema della permanenza del segno). Poiché è pure $\phi(0) = 0$, ne segue che se $k < 2$ la funzione ϕ è negativa in un intorno destro di 0, quindi tali valori di k vanno scartati ai fini di rispondere alla domanda.

Sia ora $k \geq 2$; in tal caso è $\phi'(0) \geq 0$ e, come facilmente si verifica, $\phi'(x) > 0$ se $x > 0$. Allora ϕ è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, ed essendo nulla in 0, sarà positiva in $(0, +\infty)$. La risposta alla domanda a) è quindi: tutti i numeri $k \geq 2$.

b) Per la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, si osservi innanzi tutto che esso è improprio in due sensi: nel senso che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (integrale improprio in un intervallo limitato), e nel senso che l'intervallo di integrazione $(0, +\infty)$ è non limitato. Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale improprio in un intorno di 0, per noti teoremi una condizione sufficiente per la convergenza è che l'integranda tenda a $+\infty$ o a $-\infty$ (per $x \rightarrow 0^+$) di ordine strettamente minore di 1. Nel nostro caso il numeratore di f tende a $\pi/2 \neq 0$, mentre il denominatore è infinitesimo; vediamo di che ordine.

Sviluppando $\phi(x)$ colla formula di Mac Laurin, si ha con facili calcoli:

$$\phi(x) = (k-2)x + x^2/2 + o(x^2)$$

quindi ϕ è infinitesima, per $x \rightarrow 0^+$, di ordine 2 se $k = 2$ e di ordine 1 se $k > 2$. Tenendo conto della radice quadrata al denominatore, ne segue che f tende a $+\infty$, per $x \rightarrow 0^+$, di ordine 1 se $k = 2$ e di ordine $1/2$ se $k > 2$. Per noti teoremi, l'integrale improprio $\int_0^1 f(t) dt$ converge se $k > 2$, mentre diverge positivamente se $k = 2$.

Per quanto riguarda il comportamento di f per $x \rightarrow +\infty$, si ha che il numeratore $\pi/2 - \arctan x$ tende a 0 di ordine 1 rispetto a $1/x$ (si può verificare in vari modi, per esempio col teorema di de

L'Hospital), mentre il denominatore tende a $+\infty$ di ordine $1/2$. In conclusione, tenendo conto sia del numeratore sia del denominatore, la f è infinitesima, per $x \rightarrow +\infty$, di ordine $3/2$ rispetto a $1/x$, quindi l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge per ogni $k \geq 2$.

Infine, essendo

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt$$

si ha la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ solo se $k > 2$, in quanto se $k = 2$ non converge l'integrale improprio $\int_0^1 f(t) dt$