Esercizio. Sia α un parametro reale positivo e sia data la funzione

$$f_\alpha(x) := \frac{1}{(e^x - 1 - x^2 - x/2)^\alpha}$$

a) Stabilire se la funzione f_α è definita in $(0, +\infty)$;

b) in caso affermativo, stabilire se esistono dei valori di α per i quali sia convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

Svolgimento. a) Evidentemente la funzione f_α è definita in $(0, +\infty)$ se il contenuto della parentesi al denominatore è positivo in tale intervallo (si ricordi infatti che una potenza con esponente reale generico è definita se la base è maggiore di zero). Studiamo dunque a parte la funzione

$$g(x) := e^x - 1 - x^2 - x/2$$

Risulta evidentemente $g(0) = 0,\ g'(x) = e^x - 2x - 1/2,\ g'(0) = 1/2$. Consideriamo anche la derivata seconda di g:

$$g''(x) = e^x - 2$$

Si ha $g''(x) < 0$ se $x < \log 2$, $g''(x) > 0$ se $x > \log 2$. Per noti teoremi la derivata prima g' è strettamente decrescente in $(-\infty, \log 2)$ e strettamente crescente in $(\log 2, +\infty)$; ne segue che la funzione g' ha in $\log 2$ un punto di minimo assoluto.

Si ha poi $g'(\log 2) = e^{\log 2} - 2\log 2 - 1/2 = 3/2 - 2\log 2$. Ricordando che $e > 2,71$, un facile calcolo mostra che $e^3 > 16$, cioè $e^{3/2} > 4$ e infine $3/2 > 2\log 2$. Pertanto $g'(\log 2) > 0$ quindi la funzione g', avendo in $\log 2$ un punto di minimo assoluto, è strettamente positiva in tutto $\mathbb{R}$. Allora la funzione g è strettamente crescente in $\mathbb{R}$; essendo $g(0) = 0$, si conclude, come si voleva, che $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$, e la funzione f_α è definita in $(0, +\infty)$.

b) Osserviamo che l'integrale dato è improprio in due sensi: perché non è limitato l'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$, e poi perché (come subito si verifica)

$$\lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = +\infty \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0)$$

La funzione integranda f_α è infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine superiore a qualunque potenza di $1/x$, a causa dell'esponenziale al denominatore (ciò è vero per ogni $\alpha > 0$). Pertanto l'integrale improprio è convergente, per quanto riguarda l'intervallo non limitato, qualunque sia $\alpha > 0$.

Resta da studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di zero. Un facile calcolo mostra che la funzione g, precedentemente considerata, è infinitesima, per $x \to 0^+$, di ordine 1 (basta applicare ad esempio la formula di Mac Laurin col resto di Peano, oppure osservare che $\lim_{x\to 0^+} g(x)/x = 1/2$). Allora la funzione f_α è infinita, per $x \to 0^+$, di ordine α; per noti teoremi l'integrale improprio è convergente, in un intorno destro di zero, se e solo se $\alpha < 1$.

In conclusione l'integrale improprio dato $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge se solo se $0 < \alpha < 1$. $\square$