Sia data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{1 - e^{\arctan t}}{(t-4)^2 \log(1+|t|)}\, dt$$

1) determinare l'insieme di definizione di f e studiare i limiti di f agli estremi di tale insieme;

2) dove esiste calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f;

3) se f è infinitesima per $x \to 2$, calcolarne l'ordine (se esiste).

Svolgimento. 1) Come è noto, la funzione integrale f è definita in un punto $x \in \mathbb{R}$ se la funzione integranda g è integrabile in senso proprio nell'intervallo $[2, x]$ (ad esempio se essa è ivi continua), o almeno se essa è integrabile in senso improprio (cioè avente integrale improprio convergente) nello stesso intervallo. Conviene dunque studiare preliminarmente la funzione integranda

$$g(t) := \frac{1 - e^{\arctan t}}{(t-4)^2 \log(1+|t|)}$$

Essa è ovviamente continua dove è definita; il numeratore è sempre definito, mentre il denominatore si annulla nei punti 0 e 4. L'integranda è quindi definita nell'insieme

$$I_g := (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$$

Studiamo ora il comportamento dell'integranda in un intorno dei punti 0 e 4 dove essa non è definita. Si ha con facili calcoli

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = 1/16, \quad \lim_{t \to 0^+} g(t) = -1/16, \quad \lim_{t \to 4} g(t) = -\infty$$

La funzione integranda è pertanto limitata e integrabile in un intorno di 0, mentre per quanto riguarda il punto 4 essa diverge (negativamente) per $t \to 4$. In base a noti criteri, per stabilire se converge o meno l'integrale improprio $\int_2^4 g(t)\, dt$ dobbiamo studiare l'ordine di infinito della funzione g per $t \to 4$. Una facile verifica mostra che tale ordine di infinito vale 2 (infatti il fattore $(t-4)^2$ è ovviamente infinitesimo di ordine 2, mentre gli altri fattori della funzione g non sono, per $t \to 4$, né infinitesimi né infiniti). Poiché $2 > 1$, per noti criteri l'integrale improprio $\int_2^4 g(t)\, dt$ diverge (negativamente), quindi il punto 4 non appartiene all'insieme di definizione di f. Si conclude così che l'insieme di definizione di f vale

$$I_f = (-\infty, 4)$$

Per quanto riguarda i limiti di f agli estremi di tale insieme di definizione, si ha subito

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$

per definizione di integrale improprio (negativamente) divergente. Per studiare il $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, conviene studiare preliminarmente il limite dell'integranda. Si ha:

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = 0$$

di ordine poco più grande di 2 (infatti il numeratore tende ad un numero reale non nullo, mentre il denominatore è composto di due fattori che entrambi tendono a $+\infty$). Per noti teoremi l'integrale improprio $\int_2^{-\infty} g(t)\, dt$ converge, quindi si può concludere che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

2) Per noti teoremi, la funzione integrale $f(x)$ è derivabile in tutti i punti in cui l'integranda è continua: per quanto visto prima quindi essa è certamente derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$. Resta da determinare se essa sia derivabile pure nel punto 0. Ma si è già visto che

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = 1/16, \quad \lim_{t \to 0^+} g(t) = -1/16$$

da cui (essendo come è noto $f'(x) = g(x)$ per gli x per i quali g è continua) ne segue

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1/16, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1/16$$

Da questa uguaglianza segue ancora, per noti teoremi, che f non può essere derivabile in 0. Si conclude quindi che f è derivabile solo in $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$, dove la sua derivata vale $g(x)$. Si vede poi facilmente che è $g(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$, e $g(x) < 0$ in $(0, +\infty)$, quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.

3) Per quanto visto prima, è

$$f'(2) = g(2) = \frac{1 - e^{\arctan 2}}{4 \log(3)} < 0$$

Come è noto, se una funzione è infinitesima in un punto e ivi derivabile con derivata diversa da zero, allora essa è infinitesima in quel punto di ordine 1. Ciò è esattamente quanto accade per la funzione f nel punto 2; ovviamente è $f(2) = 0$ e, come si è visto sopra, si ha $f'(2) = g(2) < 0$. Si conclude che f è infinitesima di ordine 1 nel punto 2.