

Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\ln|t-2|}{t^2-8t+15} dt$$

a) alla luce della teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) studiare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

Svolgimento. 1) Come è noto, la funzione integrale f è definita in un punto $x \in \mathbb{R}$ se la funzione integranda g è integrabile in senso proprio nell'intervallo $[0, x]$ (ad esempio se essa è ivi continua), o almeno se essa è integrabile in senso improprio (cioè avente integrale improprio convergente) nello stesso intervallo. Conviene dunque studiare preliminarmente la funzione integranda

$$g(t) := \frac{\ln|t-2|}{t^2-8t+15}$$

Essa è ovviamente continua dove è definita; il numeratore non è definito nel punto 2 (dove si annulla l'argomento del logaritmo) mentre il denominatore si annulla nei punti 3 e 5. L'insieme di definizione di g è dunque

$$I_g = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$$

Poiché l'integranda è definita e continua in $(-\infty, 2)$ possiamo già dire che la funzione integrale f è ben definita in tutti i punti x di tale intervallo (in quanto, se $x \in (-\infty, 2)$ ne segue $[0, x] \subset (-\infty, 2)$); per vedere se f è definita anche nel punto 2 conviene studiare il comportamento dell'integranda g in un intorno di tale punto.

Nel punto 2 il denominatore della g vale 3, mentre il numeratore di g per $t \rightarrow 2$ tende a $-\infty$; si ha pertanto

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = -\infty$$

Allora $f(2) = \int_0^2 g(t) dt$ è un integrale improprio e occorre capire se converge o no. A tale scopo si osserva che la funzione g tende a $-\infty$ per $t \rightarrow 2$ di ordine "logaritmico", cioè di ordine inferiore a qualunque potenza di $1/|t-2|$. Pertanto l'integrale improprio di cui si parla è convergente e la funzione f è definita nel punto 2; in altre parole, indicando con I_f l'insieme di definizione di f , si ha $2 \in I_f$.

Proseguendo nello studio della funzione integranda, vediamo ora come essa si comporta in un intorno del punto 3 (altro punto dove essa non è definita). In tale punto il numeratore e il denominatore di g si annullano, quindi il limite di g per $t \rightarrow 3$ si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Applicando ad esempio il teorema di De L'Hôpital (del quale si possono verificare facilmente le ipotesi), si vede che il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore di g vale

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1/(t-2)}{2t-8} = -1/2$$

Per il teorema suddetto è anche $\lim_{t \rightarrow 3} g(t) = -1/2$, quindi la funzione integranda g è prolungabile per continuità in 3, in tale punto l'integrale improprio converge, e risulta $3 \in I_f$.

Passiamo ora a studiare il comportamento della funzione integranda g in un intorno del punto 5 (nel quale essa non è definita). Si osserva che in tale punto il numeratore di g è definito ed ha un valore positivo (precisamente $\ln 3$), mentre il denominatore si annulla. Per stabilire se l'integrale improprio converge nel punto 5, è quindi opportuno usare il noto criterio e stabilire qual è (se esiste) l'ordine di infinito della funzione integranda nel punto 5. Più precisamente risulta

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} g(t) = -\infty$$

e l'ordine di infinito vale 1, in quanto vale 1 l'ordine di infinitesimo del denominatore. Infatti si ha

$$t^2 - 8t + 15 = (t - 3)(t - 5)$$

da cui si vede che nel punto 5 si annulla un solo fattore lineare del denominatore. Allora essendo 1 l'ordine di infinito dell'integranda, si può concludere che l'integrale improprio nel punto 5 diverge (negativamente), quindi $5 \notin I_f$. La risposta alla prima domanda è quindi

$$I_f = (-\infty, 5)$$

b) Come è noto, la funzione integrale è derivabile in tutti i punti dove l'integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti dei quali l'integranda ha un limite (destro o sinistro) che vale $+\infty$ o $-\infty$. Alla luce di questo fatto, osserviamo che, tra tutti i punti dell'insieme I_f determinato precedentemente, esiste solo il punto 2 nel quale la funzione g non è né continua né prolungabile per continuità, mentre risulta $\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = -\infty$; sarà dunque solo tale punto in cui la funzione f non è derivabile, quindi l'insieme di derivabilità di f è

$$I_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, 5)$$

c) Gli estremi dell'insieme di definizione di f sono $-\infty$ e 5. Per quanto riguarda $-\infty$, si osserva che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} g(t) dt$$

per definizione di integrale improprio su un intervallo non limitato. Per valutare tale limite è quindi necessario studiare la eventuale convergenza di tale integrale improprio. Ora si osserva che per $t \rightarrow -\infty$ sia il numeratore sia il denominatore di $g(t)$ tendono a $+\infty$, ma il numeratore vi tende con ordine logarimico (basso), mentre il denominatore tende a $+\infty$ di ordine 2. Pertanto g tende a 0, per $t \rightarrow -\infty$, di ordine maggiore strettamente

di 1 (di poco inferiore a 2), quindi l'ultimo integrale improprio considerato è convergente e si può affermare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Consideriamo infine il $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$. Si è già osservato che l'integrale improprio $\int_0^5 g(t) dt$ diverge negativamente, quindi si può concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \quad \square$$