Siano

$$g(t) = \frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{t(e^t - e)}, \qquad f(x) = \int_{-1/2}^{x} g(t)dt$$

a) Determinare l'insieme di definizione della funzione integrale f.

b) Studiare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

c) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.

d) Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to -1/2$.

Svolgimento. a) Come è noto, per studiare l'insieme di definizione di una funzione integrale, conviene innanzi tutto studiare quella della funzione integranda g. Al numeratore di g, il logaritmo è definito solo se il suo argomento è positivo, quindi deve essere $1 + \sqrt[3]{t} > 0$ cioè $t > -1$. Inoltre il denominatore di g non deve annullarsi, quindi deve essere pure $t \neq 0$ e $t \neq 1$ (si osservi infatti che, essendo la funzione $t \to e^t$ strettamente crescente, il fattore $e^t - e$ si annulla solo se $t = 1$). Pertanto l'insieme di definizione di g è il seguente:

$$I_g := (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ricordiamo ora che la funzione integrale data f è, per definizione, definita in un punto x nei casi seguenti: o l'integranda g è definita e continua nell'intervallo chiuso $[-1/2, x]$ (caso più semplice), oppure, se g non è definita o continua in tutto l'intervallo $[-1/2, x]$, almeno sia convergente l'integrale improprio di g nell'intervallo $[-1/2, x]$.
Come spesso accade, la funzione g è evidentemente continua in tutti i punti dove è definita; occorre quindi studiare solo il comportamento della funzione g in un intorno dei punti $-1,\ 0,\ 1$ dove essa non è definita. Osserviamo ancora che $-1/2 \in (-1, 0)$, quindi se $x \in (-1, 0)$ si ha $[-1/2, x] \subset (-1, 0)$ da cui g è continua in $[-1/2, x]$ quindi integrabile (in senso proprio). Pertanto possiamo già dire che

$$(-1, 0) \subset I_f$$

dove abbiamo indicato con I_f l'insieme di definizione della funzione f.

Vediamo ora se possiamo estendere l'insieme dei punti in cui f è definita. A sinistra del punto $-1/2$ possiamo al massimo arrivare al punto -1, cioè possiamo verificare se converge o no l'integrale (eventualmente improprio) $\int_{-1/2}^{-1} g(t)dt$. Consideriamo il limite di g per $t \to -1^+$; risulta evidentemente

$$\lim_{t \to -1^+} g(t) = -\infty$$

da cui si vede che l'integrale $\int_{-1/2}^{-1} g(t)dt$ è improprio, in quanto g non è limitata nell'intervallo $(-1, -1/2]$. Per stabilire se tale integrale improprio converge o meno, basta osservare che la funzione $x \to \ln x$ tende a $-\infty$, quando $x \to 0^+$, di ordine inferiore a qualunque potenza di $1/x$. Pertanto anche la funzione g tende a $-\infty$, per $t \to -1$, di ordine "basso", e l'integrale improprio che definisce $f(-1)$ è convergente. Possiamo quindi dire che $-1 \in I_f$, mentre i punti $x < -1$ non possono appartenere ad I_f in quanto g non è definita in $(x, -1)$ se $x < -1$.

Vediamo ora se possiamo trovare altri punti di I_f a destra dell'intervallo $[-1, 0)$. Studiamo dunque il comportamento della funzione integranda g in un intorno (per ora sinistro) del punto 0, cioè consideriamo il limite $\lim_{t \to 0^-} g(t)$. Tale limite si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$, e con facili calcoli si ottiene

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = -\infty$$

Si può giungere facilmente a tale risultato usando ad esempio la teoria degli ordini di infinitesimo. Abbiamo infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{\sqrt[3]{t}} = 1$$

utilizzando un ben noto limite notevole; di qui si deduce che il numeratore della g ha ordine di infinitesimo, per $t \to 0$, uguale ad $1/3$. D'altra parte il denominatore della g è infinitesimo, per $t \to 0$, di ordine 1, quindi possiamo affermare che la funzione g, per $t \to 0$, tende all'infinito di ordine $1 - 1/3 = 2/3$. Più precisamente si ha

$$\lim_{t\to 0} g(t) = -\infty \qquad \text{di ordine } 2/3$$

Ciò basta ad affermare, per noti teoremi, che l'integrale improprio converge nel punto 0 cioè $0 \in I_f$. Anzi, si può anche affermare che $(0,1) \subset I_f$, in quanto, se $x \in (0,1)$, converge anche l'integrale improprio $\int_0^x g(t)\,dt$.

Procedendo ancora a studiare l'insieme di definizione di f all'aumentare di x, dobbiamo ora considerare il comportamento della funzione integranda g in un intorno del punto 1. Risulta banalmente

$$\lim_{t\to 1^-} g(t) = -\infty \qquad \text{di ordine } 1$$

in quanto il denominatore è infinitesimo nel punto 1 di ordine 1, come è facile verificare, mentre il numeratore nel punto 1 non si annulla. Per noti teoremi dunque nel punto 1 l'integrale improprio che definisce f diverge (negativamente), quindi $1 \notin I_f$. Evidentemente non possono appartenere ad I_f nemmeno i punti $x > 1$, quindi possiamo finalmente concludere che

$$I_f = [-1, 1)$$

b) Gli estremi dell'intervallo di definizione di f sono i punti -1 e 1. Per quanto riguarda il punto -1, la funzione f è ivi ben definita (in quanto, come si è visto, $1 \in I_f$). Poiché in base alla definizione di integrale improprio convergente le funzioni integrali come f sono continue dove sono definite, si può affermare che

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda il punto 1, si è visto che in tale punto l'integrale improprio che definisce f diverge negativamente, quindi si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

c) Per noti teoremi, la funzione integrale è derivabile almeno in tutti i punti in cui la funzione integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti in cui la funzione integranda ha un limite (destro o sinistro) che vale $+\infty$ o $-\infty$. Alla luce di questi fatti, possiamo dire che f è certamente derivabile negli intervalli aperti $(-1,0)$ e $(0,1)$ nei quali l'integranda è continua, mentre non è derivabile nei punti -1 e 0 nei quali l'integranda tende a $-\infty$. Si conclude che l'insieme di derivabilità di f è il seguente:

$$I_{f'} = (-1,0) \cup (0,1)$$

Per noti teoremi, se una funzione derivabile in un intervallo ha derivata di segno costante in tale intervallo, allora essa è, in tale intervallo, crescente o decrescente (a seconda del segno della derivata). Nel nostro caso, sappiamo che in ciascuno dei due intervalli $(-1,0)$ e $(0,1)$ si ha $f'(x) = g(x)$; basterà dunque studiare il segno della g in ciascuno dei due intervalli. Come facilmente si verifica, si ha $g(x) < 0$ per ogni $x \in (-1,0) \cup (0,1)$; poiché f è definita anche nel punto 0, possiamo concludere che f è strettamente decrescente in $I_f = [-1,1)$ (e non solo separatamente in $(-1,0)$ e in $(0,1)$).

d) La funzione f si annulla nel punto $-1/2$ ed essendo continua è pure infinitesima in tale punto. Per noti teoremi, se una funzione derivabile f si annulla in un punto x_o, essa è infinitesima di ordine 1 in tale punto se risulta $f'(x_o) \neq 0$. Ora come abbiamo visto f è derivabile in $(-1,0) \cup (0,1)$ e la sua derivata vale $g(x)$ in tali intervalli, per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Abbiamo quindi

$$f'(-1/2) = g(-1/2) = -\frac{\ln(1 + \sqrt[3]{-1/2})}{2(e^{-1/2} - e)} \neq 0$$

Ciò basta a concludere che f è infinitesima, per $x \to -1/2$, di ordine 1.