Sia data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{\sqrt{|\arctan t - \pi/4|}}{(1+t^2)\ln|t|}\,dt$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) studiare i limiti della funzione f agli estremi del suo insieme di definizione, precisando, in caso di esistenza, se valgono $+\infty$, $-\infty$ o se sono finiti.

Svolgimento. a) Come è noto, la funzione integrale è definita in tutti i punti x per i quali l'integranda è definita e continua nell'intervallo (chiuso) di integrazione, oppure, se l'integranda non è definita o non è continua in qualche punto dell'intervallo di integrazione, almeno è convergente l'integrale in senso improprio.

Ne segue che conviene innanzi tutto studiare l'insieme di definizione e di continuità della funzione integranda

$$g(t) := \frac{\sqrt{|\arctan t - \pi/4|}}{(1+t^2)\ln|t|}$$

È facile osservare che il numeratore di tale funzione è sempre definito, mentre il denominatore non è definito nel punto 0 (dove non è definito il logaritmo); inoltre osserviamo che, sempre a causa del logaritmo, il denominatore si annulla se $|t| = 1$ cioè se $t = 1$ oppure $t = -1$. Da queste considerazione si ottiene l'insieme di definizione dell'integranda g:

$$I_g = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Si osserva pure banalmente che l'integranda g è continua in tutti i punti dove è definita (essendo prodotto, quoziente o composta di funzioni continue), e che $2 \in (1, +\infty)$. Pertanto se è anche $x \in (1, +\infty)$, si ha $[2, x] \subset (1, +\infty)$, da cui, per la continuità della funzione g in $[2, x]$, si può concludere che $x \in I_f$ (indicando con I_f l'insieme di definizione della funzione integrale f). In altre parole possiamo intanto dire che

$$(1, +\infty) \subset I_f$$

Spostiamoci ora dal punto 2 (estremo fisso della funzione integrale) verso sinistra, fino al punto 1 nel quale l'integranda non è definita. Conviene studiare il $\lim_{t\to 1^+} g(t)$, che si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Con facili calcoli si vede che l'ordine di infinitesimo del numeratore vale $1/2$, a causa della radice quadrata, in quanto il radicando è infinitesimo di ordine 1. Si ha infatti:

$$\lim_{t\to 1^+} |\arctan t - \pi/4|/(t-1) = \lim_{t\to 1^+} (\arctan t - \pi/4)/(t-1) = 1/2$$

Il denominatore è prodotto di due fattori, di cui il primo, $(1 + t^2)$, tende ad un numero reale diverso da zero (quindi si può trascurare nel calcolo dell'ordine di infinitesimo), mentre l'altro fattore, $\ln|t|$, tende a zero di ordine 1. Si ha infatti

$$\lim_{t\to 1^+} \ln|t|/(t-1) = \lim_{t\to 1^+} \ln t/(t-1) = \lim_{u\to 0^+} \ln(1+u)/u = 1$$

(nella quale abbiamo operato la sostituzione $u = t-1$ e abbiamo applicato un noto limite notevole). Da tutte queste considerazioni si vede che

$$\lim_{t\to 1^+} g(t) = +\infty$$

in quanto, come si è visto, il numeratore è infinitesimo di ordine $1/2$, quindi di ordine minore rispetto all'ordine di infinitesimo del denominatore che vale 1. Dai calcoli fatti siamo comunque in grado di concludere che $1 \in I_f$: infatti possiamo osservare che l'integrale improprio $f(1) = \int_2^1 g(t)\,dt$ è convergente, per un noto criterio, essendo l'integranda infinita, nel punto 1, di ordine $1/2 < 1$.

Per quanto riguarda la situazione a sinistra del punto 1, si ha, con calcoli simili ai precedenti:

$$\lim_{t\to 1^-} |\arctan t - \pi/4|/(t-1) = \lim_{t\to 1^-} (\pi/4 - \arctan t)/(t-1) = -1/2$$
$$\lim_{t\to 1^-} \ln|t|/(t-1) = \lim_{t\to 1^-} \ln t/(t-1) = \lim_{u\to 0^-} \ln(1+u)/u = 1$$

Di qui si vede che l'integranda g è infinita, per $t \to 1^-$, di ordine $1/2$ come per $t \to 1^+$, quindi l'integrale improprio $f(x) = \int_2^x g(t)\,dt$ converge anche se x è in un intorno sinistro di 1. Da queste considerazioni si può concludere che

$$(0, +\infty) \subset I_f$$

Ora continuiamo a spostarci verso sinistra; occorre studiare la funzione integranda g in un intorno del punto 0, nel quale essa non è definita. Risulta tuttavia banalmente

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|\arctan t - \pi/4|}}{(1+t^2)\ln|t|} = 0$$

perché il numeratore ha per limite un numero reale non nullo, mentre il denominatore ha per limite $-\infty$. Allora la funzione integranda è prolungabile per continuità in 0 (definendola ivi uguale al suo limite, cioè 0), ovvero, per quanto riguarda gli integrali, si comporta come se fosse definita e continua anche in 0. In altre parole il punto 0 non dà problemi, e possiamo quindi dire che

$$(-1, +\infty) \subset I_f$$

Andiamo avanti a spostarci verso sinistra. Il prossimo punto da considerare, nel quale l'integranda g non è definita, è il punto -1. Studiamo dunque il comportamento di g in un intorno di tale punto (cominciando naturalmente da destra, perché siamo partiti dal punto 2, estremo fisso dell'integrale che definisce f). Si ha

$$\lim_{t\to -1^+} g(t) = \lim_{t\to -1^+} \frac{\sqrt{|\arctan t - \pi/4|}}{(1+t^2)\ln|t|} = -\infty$$

Allora l'integrale $f(-1) = \int_2^{-1} g(t)\,dt$ è un integrale improprio, e dobbiamo capire se converge o meno. A tale scopo basta osservare che l'ultimo limite tende a $-\infty$ con ordine 1, in quanto il numeratore di g tende, per $t \to -1^+$, ad un numero diverso da zero (più precisamente: positivo), mentre il denominatore tende a 0 di ordine 1. Infatti si può trascurare il fattore $(1+t^2)$ che tende ad un numero diverso da 0, mentre si ha

$$\lim_{t\to -1^+} \ln|t|/(t+1) = \lim_{t\to -1^+} \ln(-t)/(t+1) = \lim_{u\to 0^+} \ln(1-u)/u = -1$$

(ove si è operata la sostituzione $u = t+1$). Dall'ultimo limite si vede che il denominatore di g tende a 0, per $t \to -1^+$, di ordine 1, quindi l'integranda g tende a $-\infty$ di ordine 1. Ciò basta, per noti criteri, ad affermare che l'integrale improprio $f(-1) = \int_2^{-1} g(t)\,dt$ diverge, quindi $-1 \notin I_f$. Non si può quindi andare oltre (a sinistra) del punto -1, e quindi concludiamo

$$I_f = (-1, +\infty)$$

b) Come è noto, la funzione integrale è derivabile in tutti i punti in cui la funzione integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti in cui l'integranda tende a $+\infty$ o a $-\infty$ (da destra o da sinistra), oppure ha una discontinuità di prima specie. Rivedendo i calcoli precedenti, si conclude quindi che intanto f è certamente derivabile nei punti di I_g (dove g è continua), e anche in 0 dove g è prolungabile per continuità. Invece f non è derivabile in 1 perché in tale punto l'integranda g tende a $+\infty$ o a $-\infty$, quindi in questo punto f non è derivabile. In conclusione l'insieme di derivabilità di f è

$$I_{f'} = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

c) Come si è visto, l'insieme di definizione di f è l'intervallo $(-1, +\infty)$; dobbiamo pertanto studiare i due limiti $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Per quanto riguarda il primo, per definizione di integrale improprio esso è infinito, in quanto abbiamo visto che l'integrale improprio nel punto -1 diverge; resta solo da determinare il segno. Si osserva che la funzione integranda g è negativa in un intorno destro di -1 (si ricordi che il logaritmo è negativo nell'intervallo $(0, 1)$, quindi $\ln|t| < 0$ in $(-1, 0)$). Tenendo anche conto del fatto che l'integrale tra 2 e x è orientato in modo apposto a quello naturale se $x < 2$, quindi va cambiato un segno, si conclude che

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

Per quanto riguarda il $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, si può osservare che, per $t \to +\infty$, l'integranda tende a 0 di ordine di poco superiore a 2 (a causa dei due fattori al denominatore che tendono entrambi a $+\infty$, mentre il numeratore tende ad un numero reale positivo). Per un noto criterio di convergenza sugli integrali impropri negli intervalli non limitati, si conclude che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$