Un problema di minimo.

Un fabbricante di oggetti metallici deve costruire delle lattine di forma cilindrica aventi ciascuna il volume di un litro. Si chiede di determinare il raggio del cerchio di base e l'altezza della lattina in modo da rendere minimo il consumo di metallo.

Svolgimento. Chiamiamo r il raggio del cerchio di base e h l'altezza del cilindro. Dalla geometria elementare sappiamo che:

1) l'area del cerchio di base vale πr^2;
2) l'area laterale del cilindro vale $2\pi rh$;
3) il volume del cilindro vale $\pi r^2 h$.

Il problema si può quindi impostare nel modo seguente: determinare r ed h in modo che sia

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\pi r^2 + 2\pi rh = \text{minimo} \\ \pi r^2 h = 1 \end{cases}$$

Apparentemente la funzione da rendere minima dipende dalle due variabili r e h, ma tenendo conto del vincolo (la seconda delle (1)) possiamo esprimere una delle due variabili in funzione dell'altra e ricondurci così ad un problema (più semplice) che coinvolge una sola variabile.
Per evitare radici quadrate, conviene evidentemente ricavare h in funzione di r dalla seconda delle (1) e quindi poniamo

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

e in tal modo la funzione da rendere minima diventa (sostituendo nella prima delle (1))

$$\phi(r) := 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

Osserviamo che è $r > 0$, quindi dobbiamo studiare la funzione ϕ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si ha con facili calcoli

$$\lim_{r \to 0^+} \phi(r) = \lim_{r \to +\infty} \phi(r) = +\infty$$

e inoltre

$$\phi'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - 1)}{r^2}$$

Il segno di $\phi'(r)$ dipende solo dal segno del fattore $2\pi r^3 - 1$; tale polinomio è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e si annulla solo nel punto $1/\sqrt[3]{2\pi}$.
Di qui si vede che, per noti teoremi, la funzione ϕ è strettamente decrescente in $(0, 1/\sqrt[3]{2\pi})$ e strettamente crescente in $(1/\sqrt[3]{2\pi}, +\infty)$. Si conclude che la funzione ϕ ammette un unico punto di minimo assoluto in $1/\sqrt[3]{2\pi}$.
Allora i valori di r ed h che rendono minimo il consumo di metallo sono i seguenti:

$$r_o = 1/\sqrt[3]{2\pi}, \qquad h_o = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Naturalmente quello che conta davvero è il rapporto tra h_o ed r_o; tale rapporto si manterrebbe costante se si formulasse diversamente il problema imponendo un diverso volume della lattina. Abbiamo ottenuto che

$$\frac{h_o}{r_o} = 2$$

- -

Abbiamo risolto il problema fissando il volume della lattina e abbiamo cercato i valori di r e h tali da rendere minima la superficie totale del cilindro. Si poteva procedere in modo, per così dire, duale, cioè: fissare la superficie totale della lattina e determinare i migliori valori di r e h in modo da rendere massimo il volume. Procediamo allora in questo modo:
determinare r ed h in modo che sia

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi r^2 h = \text{massimo} \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = 1 \end{cases}$$

(Ho indicato per semplicità con 1 il valore della superficie totale della lattina, in quanto è irrilevante, perché quello che conta è solo il rapporto tra r e h come abbiamo già osservato).
Procedendo come in precedenza, dalla seconda delle (2) otteniamo

$$h = \frac{1}{2\pi r} - r$$

da cui, sostitendo nella prima delle (2), otteniamo la funzione da rendere massima:

$$\psi(r) := \pi r^2 \left(\frac{1}{2\pi r} - r \right) = \frac{r}{2} - \pi r^3$$

Ne segue con facili calcoli:

$$\psi'(r) = \frac{1}{2} - 3\pi r^2$$

da cui segue che la funzione ψ è crescente nell'intervallo $(0, 1/\sqrt{6\pi}]$ e decrescente in $[1/\sqrt{6\pi}, +\infty)$. Allora, indicando nuovamente con r_o e h_o i migliori valori di r e h, si trova

$$r_o = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \qquad h_o = \frac{2}{\sqrt{6\pi}}$$

e infine, come in precedenza:

$$\frac{h_o}{r_o} = 2 \quad \square$$