Sulla funzione di Dirichlet

È nota la cosiddetta "funzione di Dirichlet"

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

Poiché l'insieme dei razionali è denso nei reali (cioè tra due qualunque numeri reali sono compresi infiniti numeri razionali), e pure l'insieme degli irrazionali è denso nei reali (cioè tra due qualunque numeri reali sono compresi infiniti numeri irrrazionali), è chiaro che la funzione di Dirichlet non è continua in nessun punto dell'asse reale.

Non tutti sanno che si può trovare una successione di funzioni, convergente per ogni x reale, che ha per limite la funzione di Dirichlet. Si consideri ad esempio il seguente procedimento, dovuto a Giuseppe Peano.

Consideriamo la funzione

$$f(x) := |\mathrm{sign}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e la successione, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := f[\sin(n!\pi x)]$$

La funzione $x \to \sin x$ ha la proprietà che si annulla se solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = k\pi$. Pertanto se x è razionale esiste un numero intero k tale che $kx \in \mathbb{Z}$ e quindi $\sin(k\pi x) = 0$. Se $n \in \mathbb{N},\ n \geq k$ il numero $n!$ è multiplo di k quindi ancora $n!x \in \mathbb{Z}$ e $\sin(n!\pi x) = 0\ \forall n \geq k$. Si conclude che se x è razionale è $f_n(x) = 0\ \forall n \geq k$ e $\lim_n f_n(x) = 0$.

Viceversa se x è irrazionale sarà $kx \notin \mathbb{Z}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, da cui $\sin(k\pi x) \neq 0\ \forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(n!\pi x) \neq 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n(x) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. In questo caso la conclusione è quindi $\lim_n f_n(x) = 1$.

Non c'è da stupirsi che la funzione ϕ non sia continua: nessuna delle due ipotesi che assicurano la continuità del limite di una successione di funzioni è verificata. Infatti le funzioni f_n non sono continue e la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente in nessun intervallo dell'asse reale.