π è un numero irrazionale.

Dimostrazione (pubblicata da Ivan Niven nel 1947). Si ragiona per assurdo: supponiamo che sia

$$\pi = p/q \tag{1}$$

con p, q interi positivi. Consideriamo inizialmente le funzioni

$$g_n(x) = x^n(\pi - x)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

Si tratta di polinomi di grado $2n$, e risulta $g_n(x) = g_n(\pi - x)$ ed anche, come si può facilmente verificare,

$$g_n^{(j)}(x) = (-1)^j g_n^{(j)}(\pi - x) \quad (j, n \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

Per la (1) possiamo scrivere

$$q^n g_n(x) = x^n(p - qx)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

Il polinomio $q^n g_n(x)$ è divisibile per x^n, quindi si può anche scrivere

$$q^n g_n(x) = \sum_{j=n}^{2n} c_j x^j \quad (c_j \in \mathbb{Z},\ n \leq j \leq 2n) \tag{5}$$

In altre parole i coefficienti di x^j in $q^n g_n$ sono diversi da 0 solo se $j \geq n$ (essendo il polinomio multiplo di x^n) e se (anche) $j \leq 2n$ (essendo il polinomio di grado $2n$). Inoltre tali coefficienti c_j sono numeri interi in quanto derivano semplicemnte dallo sviluppo del binomio di Newton di $(p - qx)^n$ (e p, q sono naturali).
Vogliamo ora calcolare le derivate successive del polinomio $q^n g_n$ nel punto $x = 0$. Si vede subito che possono essere non nulle (nell'origine) solo le derivate di ordine k con $n \leq k \leq 2n$ (per le osservazioni precedenti, vedi la (5)), e più precisamente risulta

$$q^n g_n^{(k)}(0) = k! c_k \quad (n \in \mathbb{N},\ n \leq k \leq 2n) \tag{6}$$

mentre tutte le altre derivate di $q^n g_n$, calcolate in 0, sono nulle.
Consideriamo ora le funzioni

$$f_n(x) := \frac{q^n g_n(x)}{n!} = \frac{x^n(p - qx)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

Per le (6) le derivate successive di f_n nel punto 0 valgono

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{k! c_k}{n!} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \leq k \leq 2n) \tag{8}$$

(le altre sono tutte nulle). È ora importante osservare che i secondi membri nella (8) sono tutti numeri interi, perché $c_k \in \mathbb{Z}$ come si è visto, e anche $k!/n! \in \mathbb{N}$ essendo $k \geq n$. Dalla (3) segue pure che sono intere (eventualmente negative) le derivate di f_n nel punto π:

$$f_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k \frac{k! c_k}{n!} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \leq k \leq 2n) \tag{9}$$

Consideriamo certi integrali definiti associati alle funzioni f_n. Intanto risulta banalmente

$$0 < f_n(x) \sin x < \frac{(q\pi^2)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \pi) \tag{10}$$

da cui

$$0 < \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx < \frac{\pi(q\pi^2)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

e anche

$$\lim_n \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = 0 \tag{12}$$

Passiamo ora a considerare le funzioni

$$F_n(x) := f_n(x) - f_n''(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \tag{13}$$

Come si vede, $F_n(x)$ è una combinazione lineare di derivate successive di f_n, dove compaiono solo le derivate di ordine pari e con i segni alternati. Se deriviamo altre due volte, abbiamo

$$F_n''(x) = f_n''(x) - f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n+1} f^{(2n)}(x) \tag{14}$$

nella quale si è anche tenuto conto del fatto che $f_n^{(2n+2)}(x) = 0$. Sommando le (13), (14) otteniamo

$$F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{15}$$

e poi

$$\{F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x\}' = \{F_n''(x) + F_n(x)\} \sin x = f_n(x) \sin x \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{16}$$

e ancora

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx &= \int_0^\pi \{F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x\}' dx = \\ &= \big[F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x\big]_0^\pi = F_n(\pi) + F_n(0) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{17}$$

Per la definizione di F_n (vedi la (13)) e per le (8), (9), sia $F_n(0)$ sia $F_n(\pi)$ sono numeri interi, quindi per le (11), (17) l'integrale $\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx$ è un numero intero positivo, dunque maggiore o uguale ad 1. Tenendo conto della (12) abbiamo finalmente ottenuto una contraddizione. $\square$