Qualche proprietà dei numeri primi.

Ricordiamo che un numero naturale n si dice primo se è divisibile solo per se stesso e per l'unità. Per convenzione si assume che il primo numero primo sia 2 anziché 1, quindi i primi numeri primi sono

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \cdots$$

La prima proprietà interessante di questi numeri è che i numeri primi sono *infiniti*.
Questo fatto, già noto agli antichi greci, si può facilmente dimostrare provando la seguente proposizione equivalente:
Proposizione. *Dato un qualunque numero naturale positivo n, consideriamo i primi n numeri primi (in ordine crescente):*

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

Allora esiste un numero primo maggiore di p_n.
Dimostrazione. Consideriamo il numero

$$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$$

Tale numero naturale non è divisibile per nessuno dei numeri $p_1, p_2, \dots p_n$, quindi esso o è primo o è divisibile per un numero primo maggiore di p_n. $\square$

Vediamo ora un'altra interessante proprietà dei numeri primi. Si potrebbe pensare che tali numeri, essendo infiniti, si distribuiscano per così dire uniformemente in $\mathbb{N}$. Si può invece dimostrare che ci sono, in $\mathbb{N}$, dei "buchi" arbitrariamente grandi in cui non c'è nessun numero primo. Più precisamente:
Proposizione. *Sia k un numero naturale positivo. Allora esistono due numeri naturali p, q tali che $k \leq p - q$ e tali che ogni numero naturale n per cui $q \leq n \leq p$ non sia primo.*
Dimostrazione. Consideriamo infatti i numeri

$$q = (k+2)! + 2, \qquad p = (k+2)! + k + 2$$

Risulta banalmente $p - q = k$ e inoltre, se $q \leq n \leq p$, si può scrivere

$$n = (k+2)! + h \qquad \text{essendo } 2 \leq h \leq k+2$$

Tale h è quindi un fattore di $(k+2)!$, per cui $n = (k+2)! + h$ è divisibile per h. Ciò prova che nessun numero n compreso tra q e p è primo. $\square$