Sia data la funzione

$$y(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)(2x^2+1)} & \text{se } x < 0 \\ \\ \dfrac{\ln(\arctan x + 1)}{(1+x^2)(\arctan x + 1)^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinare, se esistono, tutte le primitive di y in $\mathbb{R}$;

b) determinare, se esiste, la primitiva g di y tale che $g(1) = 0$.

Svolgimento. a) Osserviamo innanzi tutto che la funzione y è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ (verifica facile), quindi per noti teoremi ammette ivi delle primitive; poi per un altro teorema, essendo $\mathbb{R}$ un intervallo, in $\mathbb{R}$ tutte le primitive differiscono per una costante.

Cominciamo a determinare le primitive di y separatamente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$; vedremo in seguito che cosa accade in un intorno del punto 0.

Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione y è una funzione razionale (rapporto tra due polinomi), in cui il numeratore ha grado minore del denominatore. In tale caso per noti teoremi si può scrivere

$$\frac{x}{(x-1)(2x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

essendo A, B, C opportune costanti da determinarsi. Liberando dai denominatori otteniamo

$$x = A(2x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

da cui, con facili calcoli,

$$\begin{cases} 2A + B &= 0 \\ C - B &= 1 \\ A - C &= 0 \end{cases} \qquad \text{e infine} \qquad \begin{cases} A &= 1/3 \\ B &= -2/3 \\ C &= 1/3 \end{cases}$$

Abbiamo poi, con calcoli immediati o quasi:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(1-x) + c \qquad \text{(si ricordi infatti che } x \in (-\infty, 0)\text{)}$$

$$\int \frac{x}{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+1) + c$$

$$\int \frac{1}{2x^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x) + c$$

Sostituendo in tutti i passaggi precedenti otteniamo infine

$$\int y(x)\,dx = \int \frac{x}{(x-1)(2x^2+1)}\,dx = \frac{1}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln(2x^2+1) + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan(\sqrt{2}x) + c$$

valida nell'intervallo $(-\infty, 0)$, essendo c una costante arbitraria.

Passiamo ora allo studio dell'integrale indefinito di y nell'intervallo $(0, +\infty)$. Qui può essere conveniente applicare il teorema di integrazione per sostituzione, ponendo ad esempio $\arctan x = u$. Con tale sostituzione abbiamo

$$\int \frac{\ln(\arctan x + 1)}{(1 + x^2)(\arctan x + 1)^2}\, dx = \left(\int \frac{\ln(1 + u)}{(1 + u)^2}\, du\right)_{u=\arctan x} \tag{1}$$

Ci siamo pertanto ricondotti al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{\ln(1 + u)}{(1 + u)^2}\, du$$

che possiamo calcolare per parti, assumendo $1/(1 + u)^2$ come fattore differenziale e $\ln(1 + u)$ come fattore finito. Con facili calcoli otteniamo

$$\int \frac{\ln(1 + u)}{(1 + u)^2}\, du = -\frac{\ln(1 + u)}{1 + u} + \int \frac{1}{(1 + u)^2}\, du = -\frac{1 + \ln(1 + u)}{1 + u} + c$$

da cui, tenendo conto della (1), abbiamo

$$\int y(x)\, dx = \int \frac{\ln(\arctan x + 1)}{(1 + x^2)(\arctan x + 1)^2}\, dx = -\frac{1 + \ln(1 + \arctan x)}{1 + \arctan x} + c$$

valida nell'intervallo $(0, +\infty)$, essendo c una costante arbitraria.

Abbiamo finora trovato l'integrale indefinito di y (totalità delle primitive di y) separatamente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Come sarà fatto l'integrale indefinito di y in $\mathbb{R}$? Basterà trovare una primitiva di y in $\mathbb{R}$, perché tutte le altre differiranno da essa per una costante arbitraria (come si è già osservato).

Definiamo per brevità

$$\begin{cases} f_1(x) := \dfrac{1}{3}\ln(1 - x) - \dfrac{1}{6}\ln(2x^2 + 1) + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\arctan(\sqrt{2}x) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\[2ex] f_2(x) := -\dfrac{1 + \ln(1 + \arctan x)}{1 + \arctan x} & \text{se } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0) = -1$$

A noi serve una funzione continua in $\mathbb{R}$, anzi ivi derivabile, che sia una primitiva di y in $\mathbb{R}$. Possiamo definire ad esempio

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ f_2(x) + 1 & \text{se } x \in [0, -\infty) \end{cases}$$

In base ai calcoli precedenti, tale funzione f è una primitiva di y sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$ sia nell'intervallo $(0, +\infty)$. Resta solo da verificare se f è derivabile anche nel punto 0 e risulta $f'(0) = y(0)$. Si osserva intanto che per definizione è $y(0) = 0$, e che f è continua in 0 e risulta $f(0) = 0$. Ma risulta pure

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

in quanto, fuori dall'origine, è $f'(x) = y(x)$ e la funzione y è continua in $\mathbb{R}$. In forza ad un noto risultato (corollario del teorema di Lagrange), ciò basta a concludere, come si voleva, che f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$.

Si risponde quindi alla prima domanda dicendo che le primitive di y in $\mathbb{R}$ sono date da

$$f(x) + c$$

essendo c una costante arbitraria.

b) Per determinare la primitiva g di y tale che $g(1) = 0$, basterà scegliere opportunamente la costante c. Con facili calcoli si trova

$$g(x) = f(x) + \frac{\ln(1 + \pi/4) - \pi/4}{1 + \pi/4} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \square$$