Esercizio. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}\,(x+1)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) determinare l'ordine di infinitesimo della successione $\{\tan(1/n) - \arctan(1/n)\}_{n\geq 1}$;

b) stabilire per quali valori del parametro reale x (se ce ne sono) la serie converge;

c) stabilire per quali valori del parametro reale x (se ce ne sono) la serie converge assolutamente.

Svolgimento. a) Applichiamo la formula di Mac Laurin alla funzione $x \to \tan x$:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

e alla funzione $x \to \arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui segue

$$\tan x - \arctan x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e anche

$$\tan(1/n) - \arctan(1/n) = \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)$$

cioè la successione $\{\tan(1/n) - \arctan(1/n)\}$ è infinitesima di ordine 3.

b) e c). È meglio rispondere dapprima alla terza domanda. Per stabilire se la serie data converge assolutamente, conviene applicare il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti. Si ha:

$$\lim_n \left| \frac{\sqrt[3]{\tan(1/(n+1)) - \arctan(1/(n+1))}\,(x+1)^{n+1}}{\sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}\,(x+1)^n} \right| =$$

$$= |x+1| \lim_n \sqrt[3]{\frac{\tan(1/(n+1)) - \arctan(1/(n+1))}{1/(n+1)^3} \frac{1/n^3}{\tan(1/n) - \arctan(1/n)} \frac{n^3}{(n+1)^3}} =$$

$$= |x+1| \sqrt[3]{\frac{1}{6} \times 6 \times 1} = |x+1|$$

In forza del criterio rapporto, la serie dei valori assoluti converge se $|x+1| < 1$, cioè se $-2 < x < 0$, mentre non converge se $|x+1| > 1$ cioè se $x > 0$ o se $x < -2$. Ricordiamo anche che, sempre in base al criterio del rapporto, se $x > 0$ o se $x < -2$, il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi per tali valori di x non converge neppure la serie data.

Restano da studiare i casi $x = 0$ e $x = -2$, per quali il criterio del rapporto non dà risposte. Se $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}$$

che è a termini positivi, quindi o convergente o positivamente divergente. Per quanto visto al punto a), la successione $\{\tan(1/n) - \arctan(1/n)\}_{n\geq 1}$ è infinitesima di ordine 3, quindi la successione

$\{\sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}\}_{n\geq 1}$ è infinitesima di ordine 1. Per noti teoremi la serie considerata (per $x = 0$) è positivamente divergente.

Studiamo ora la serie nel caso $x = -2$; essa diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}$$

essa è dunque una serie a termini di segno alterno. Vediamo se è possibile applicare il noto criterio di convergenza di Leibnitz. Si richiede innanzi tutto che il termine generale sia infinitesimo, cioè che

$$\lim_n \sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)} = 0$$

condizione verificata (vedi punto a)). Si richiede poi che la successione del termine generale (presa in valore assoluto), cioè $\{\sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)}\}_{n\geq 1}$, sia decrescente.
Osserviamo che la funzione $x \to \sqrt[3]{x}$ è strettamente crescente, quindi sarà sufficiente provare la decrescenza della successione $\{\tan(1/n) - \arctan(1/n)\}_{n\geq 1}$. A tale scopo studiamo la funzione

$$h(x) := \tan x - \arctan x$$

Poiché risulta evidentemente $1/n \in (0, \pi/2)$ $\forall n \geq 1$, è sufficiente studiare tale funzione in questo intervallo. Risulta

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x - 1/(1 + x^2) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

Pertanto la funzione h è strettamente crescente nell'intervallo $(0, \pi/2)$, e la successione $\{\tan(1/n) - \arctan(1/n)\}_{n\geq 1}$ è strettamente decrescente.

Sono quindi soddisfatte tutte le ipotesi del criterio di Leibnitz e la serie data per $x = -2$ è convergente (in tale punto tuttavia non converge assolutamente come si è visto studiando la serie nel caso $x = 0$).

In conclusione la serie data converge assolutamente se e solo se $-2 < x < 0$, mentre converge (non assolutamente) anche nel punto $x = -2$; non converge se $x > 0$ o se $x < -2$. $\square$