Sia k un parametro reale; consideriamo le funzioni

$$f_k(x) := \ln[(k-1)x] + kx$$

a) Determinare l'insieme di definizione (o dominio) di f_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f_k(x) = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
c) Sia ora $k = 2$; calcolare (se esiste) $(f_2^{-1})'(2)$.

Svolgimento. a) Come è noto, il logaritmo è definito solo se il suo argomento è un numero positivo; si ottiene quindi facilmente (indicando con I_k l'insieme di definizione di f_k):

$$I_k = \begin{cases} (-\infty, 0) & \text{se } k < 1 \\ \emptyset & \text{se } k = 1 \\ (0, +\infty) & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

b) Per avere un'idea dell'andamento delle funzioni f_k, come è noto può essere utile studiarne i limiti agli estremi del loro insieme di definizone ed eventualmente il segno della derivata prima. Cominciamo dal caso $k < 0$: risulta evidentemente

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f_k(x) = -\infty, \quad f_k'(x) = \frac{1}{x} + k, \qquad x \in (-\infty, 0), \quad k < 0$$

Si osserva che le funzioni f_k sono tutte continue dove solo definite; in particolare, se $k < 0$ sono continue in $(-\infty, 0)$ ed avendo limiti di segno opposto agli estremi di tale intervallo, per noti teoremi la funzione f_k ha almeno uno zero in tale intervallo. Avendo anche osservato che la derivata di f_k è negativa in tale intervallo, per altri noti teoremi possiamo dire che f_k è strettamente decrescente in tale intervallo, quindi si annulla in un solo punto. Si conclude quindi che, nel caso $k < 0$, la funzione ha un solo zero.
Consideriamo ora il caso $k = 0$; risulta ancora banalmente

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f_0(x) = -\infty, \quad f_0'(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty, 0), \quad k = 0$$

quindi la situazione è la stessa del caso precedente, e f_0 si annulla in un solo punto (in questo caso si può anche dire facilmente qual è questo punto: esso è -1).
Passiamo ora a considerare il caso $0 < k < 1$; si ha questa volta

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} f_k(x) = -\infty, \quad f_k'(x) = \frac{1}{x} + k, \qquad x \in (-\infty, 0), \quad 0 < k < 1$$

Come si vede ora i limiti agli estremi sono dello stesso segno, quindi non è più chiaro se la funzione f_k si annulla o no. Dallo studio della derivata prima risulta che la funzione f_k è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -1/k]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[-1/k, 0)$; la funzione ammette pertanto nel punto $-1/k$ un punto di massimo assoluto. Studiando il segno della funzione f_k in tale punto di massimo avremo qundi delle indicazioni sul numero degli eventuali zeri della funzione. Si ha

$$f_k(-1/k) = \ln(1/k - 1) - 1 \qquad (0 < k < 1)$$

Tale numero, come subito si verifica, si annulla se $k = 1/(e+1)$, mentre è negativo se $1/(e+1) < k < 1$ ed è positivo se $0 < k < 1/(e+1)$. Si conclude che se $1/(e+1) < k < 1$ la funzione f_k non si annulla

mai, se $k = 1/(e+1)$ essa ha un solo zero (che è il punto $1/(e+1)$) mentre se $0 < k < 1/(e+1)$ la funzione f_k ha due zeri (uno nell'intervallo $(-\infty, 1/(e+1))$ e l'altro nell'intervallo $1/(e+1), 0)$).
Il caso $k = 1$ dà una risposta immediata, perché in questo caso la funzione non è mai definita e di conseguenza non si annulla mai.
Resta quindi da considerare solo il caso $k > 1$. In questo caso risulta

$$\lim_{x\to 0} f_k(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_k(x) = +\infty, \qquad f_k'(x) = \frac{1}{x} + k, \qquad x \in (0, +\infty), \quad k > 0$$

La funzione ha valori di segno contrario in un intorno degli estremi del suo intervallo di definizione, mentre la derivata è sempre positiva, quindi la funzione è strettamente crescente nello stesso intervallo. Si conclude che in questo caso la funzione f_k si annulla una sola volta.
Riassumendo,la risposta alla domanda è dunque la seguente:

Se $k < 0$ l'equazione $f_k(x) = 0$ ha una sola soluzione;
se $k = 0$ l'equazione $f_k(x) = 0$ ha una sola soluzione;
se $0 < k < 1/(e+1)$ l'equazione $f_k(x) = 0$ ha due soluzioni;
se $k = 1/(e+1)$ l'equazione $f_k(x) = 0$ ha una soluzione;
se $1/(e+1) < k < 1$ l'equazione $f_k(x) = 0$ non ha soluzioni;
se $k = 1$ l'equazione $f_k(x) = 0$ non ha soluzioni;
se $k > 1$ l'equazione $f_k(x) = 0$ ha una sola soluzione.

c) Si è visto al punto precedente che se $k > 1$ la funzione f_k, definita in questo caso in $(0, +\infty)$, è ivi strettamente crescente, quindi invertibile, e si può indicare (come d'uso) la funzione inversa con f_k^{-1}. Ha perfettamente senso quindi chiedersi se tale funzione inversa è derivabile nel punto 2 ed, in caso affermativo, quanto vale la derivata.
Per rispondere a tale domanda può essere utile il noto teorema di derivazione della funzione inversa. Si è visto che se $k = 2$ la funzione f_2 è derivabile in $(0, +\infty)$ con derivata positiva, quindi per il citato teorema di derivazione della funzione inversa la funzione f_k^{-1} è derivabile in ogni punto dell'immagine di f_k (cioè dell'insieme di definizione di f_k^{-1}), e la derivata è uguale alla reciproca della derivata di f_k nel punto corrispondente. Poiché si chiede di calcolare $(f_2^{-1})'(2)$, dobbiamo innanzitutto procurarci il corrispondente del punto 2 nell'intervallo $(0, +\infty)$, cioè il punto x_o tale che $f_2(x_o) = 2$: è immediato osservare che tale punto è 1. Abbiamo quindi, in base al teorema di derivazione delle funzioni inverse:

$$(f_2^{-1})'(2) = 1/f_2'(1) = 1/3 \qquad \square$$