Esercizio 1. *Sia data la successione*

$$a_n := \sqrt{\ln(n^2+2n+e)} - \sqrt{2\ln(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Stabilire se la successione è limitata;

b) stabilire se la successione è monotona ed, in caso affermativo, di che tipo;

c) posto $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*, calcolare, se esistono,* $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\lim_n a_n$*;*

d) calcolare, se esiste, $\lim_n n^3 a_n$.

Svolgimento. a) Conviene riscrivere la successione come segue:

$$\begin{aligned}
a_n &:= \sqrt{\ln(n^2+2n+e)} - \sqrt{2\ln(n+1)} = \\
&= \frac{[\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} - \sqrt{2\ln(n+1)}][\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}]}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}} = \\
&= \frac{\ln(n^2+2n+e) - 2\ln(n+1)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}} = \frac{\ln\left(\frac{n^2+2n+e}{(n+1)^2}\right)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}} = \\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{e-1}{(n+1)^2}\right)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}}
\end{aligned}$$

(per scrivere queste uguaglianze, oltre all'algebra elementare, si sono tenute presenti note proprietà dei logaritmi).

Osserviamo l'ultima espressione trovata: si vede intanto che la successione è positiva per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi inferiormente limitata. Notiamo inoltre che il numeratore $\ln\left(1+\frac{e-1}{(n+1)^2}\right)$ è una successione decrescente, in quanto il denominatore cresce, la frazione $(e-1)/(n+1)^2$ decresce e il logaritmo, in quanto funzione crescente, non altera la decrescenza del suo argomento. Per analoghi motivi osserviamo che il denominatore $\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}$ è una successione crescente, in quanto crescono gli argomenti dei logaritmi, e poi applicando il logaritmo e la radice quadrata (funzioni crescenti) si mantiene la crescenza. Infine si osserva che la successioen data, come scritta nella sua ultima espressione, si presenta come rapporto tra una successione decrescente ed una successione crescente, quindi complessivamente è una successione decrescente.

Ciò permette di concludere che la successione è superiormente limitata dal valore $a_o = 1$.

b) Si è già risposto nella domanda precedente. Si può solo aggiungere che tutte le funzioni e successioni in gioco sono strettamente monotone, qundi la successione data è strettamente decrescente.

c) In base alle risposte precedenti, possiamo affermare che $\max A = \sup A = a_o = 1$, mentre

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{\ln\left(1+\frac{e-1}{(n+1)^2}\right)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}} = 0$$

in quanto il numeratore di tale espressione è infinitesimo (si tenga presente che $\ln 1 = 0$ e che il logaritmo è una funzione continua), mentre il denominatore tende evidentemente a $+\infty$.

Per noti teoremi, una successione decrescente ha come limite il suo estremo inferiore, quindi si pucòncludere che $\inf A = 0$, mentre non esiste $\min A$, in quanto è $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

d) In base a quanto visto prima, si può scrivere:

$$n^3 a_n = \frac{n^3 \ln\left(1 + \frac{e-1}{(n+1)^2}\right)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}} =$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{e-1}{(n+1)^2}\right)}{(e-1)/(n+1)^2} \cdot \frac{n(e-1)}{\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)}}$$

Consideriamo gli ultimi tre rapporti. Il primo ha per limite 1 (ovvio), il secondo pure (basta ricordare un noto limite notevole), mentre il terzo ha per limite $+\infty$, in quanto come è noto il logaritmo (al denominatore) tende a $+\infty$ di ordine inferiore a qualunque potenza di n. Più precisamente si può scrivere (per n abbastanza grande)

$$\sqrt{\ln(n^2+2n+e)} + \sqrt{2\ln(n+1)} \leq 2\ln n^3 = 6\ln n$$

da cui facilmente l'asserto, ricordando che $\lim_n n/(\ln n) = +\infty$.

Per noti teoremi sui limiti, si conclude che $\lim_n n^3 a_n = +\infty$.