Esercizio. *Sia $k \in \mathbb{R},\ k \geq -2$. Si consideri la successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_o = k \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Studiare le eventuali limitatezza, monotonia e convergenza della successione al variare del parametro reale k.

Svolgimento. 1) Cominciamo dal caso più semplice, cioè $k = 2$. In tal caso è evidentemente $a_n = 2\ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi la successione è limitata, crescente, decrescente, e convergente a 2.

2) Consideriamo ora il caso $-2 \leq k < 2$. Se $-2 \leq k < 0$ è banalmente $a_o = k < \sqrt{2+k} = a_1$, mentre se $0 \leq k < 2$ si può scrivere

(1) $$a_o = k < \sqrt{2k} < \sqrt{2+k} = a_1 < 2$$

quindi si potrebbe congetturare che la successione sia (strettamente) crescente e superiormente limitata da 2.

Poniamo pertanto

$$\mathbb{K} := \{n \in \mathbb{N} :\ a_n < a_{n+1} < 2\}$$

e cerchiamo di dimostrare (per induzione) che $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Si è già visto che $a_o < a_1 < 2$, cioè che $0 \in \mathbb{K}$. Per completare la dimostrazione per induzione occorre provare che se $n \in \mathbb{K}$, allora anche $n+1 \in \mathbb{K}$, cioè che se si suppone

(2) $$a_n < a_{n+1} < 2$$

se ne può dedurre

(3) $$a_{n+1} < a_{n+2} < 2$$

Tenendo conto della (2) risulta intanto

(4) $$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} < \sqrt{2+2} = 2$$

Inoltre si può supporre $a_{n+1} \geq 0$ (altrimenti la (3) è automaticamente verificata) ed in questo caso risulta

(5) $$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2} < \sqrt{2a_{n+1}} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Dalle (4), (5) segue la (3) nel caso $k \in [-2, 2)$.

3) Resta da considerare il caso $k > 2$; si procede in modo analogo al caso precedente. Risulta intanto

(6) $$2 < a_1 = \sqrt{2+k} < \sqrt{2k} < \sqrt{k^2} = k = a_o$$

quindi si può fare la congettura che la successione sia inferiormente limitata (da 2) e strettamente decrescente.

Poniamo pertanto

$$\mathbb{K} := \{n \in \mathbb{N} :\ 2 < a_{n+1} < a_n\}$$

e cerchiamo di dimostrare (per induzione) che $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Si è già visto che $2 < a_1 < a_o$, cioè che $0 \in \mathbb{K}$. Per completare la dimostrazione per induzione occorre provare che se $n \in \mathbb{K}$, allora anche $n+1 \in \mathbb{K}$, cioè che se si suppone

(7) $$2 < a_{n+1} < a_n$$

se ne può dedurre

(8) $$2 < a_{n+2} < a_{n+1}$$

Tenendo conto della (7) risulta intanto

(9) $$2 = \sqrt{2+2} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

e inoltre

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1} \tag{10}$$

Dalle (9), (10) segue la (8), quindi anche nel caso $k > 2$ si ha $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Si conclude che la successione data è sempre monotona, più precisamente strettamente crescente se $-2 \leq k < 2$, costante se $k = 2$, strettamente decrescente se $k > 2$.

4) Per noti teoremi abbiamo intanto che la succesione data, essendo per ogni $k \geq -2$ monotona e limitata, ammette limite reale; chiamando ℓ tale limite, si è già visto che $\ell = 2$ se $k = 2$.

Per calcolare ℓ quando $k \neq 2$, basta passare al limite (per $n \to +\infty$) nella definizione $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, ottenendo

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}$$

da cui, con facili calcoli, si ottiene $\ell = 2$. Si conclude che la successione data converge per ogni valore di $k \in [-2, +\infty)$, ed ha sempre per limite 2. $\square$