Data la successione (definita per ricorrenza)

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_o = 2, \\ a_{n+1} = 1 + \log a_n \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

a) stabilire se essa è limitata, monotona (di che tipo), convergente;

b) calcolare (se esistono) $\max a_n,\ \min a_n,\ \sup a_n,\ \inf a_n,\ \lim_n a_n$.

Svolgimento. Cominciamo a vedere se la successione data è ben definita per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo intanto che se $a_n > 1$, $\log a_n$ è definito ed è $\log a_n > 0$, quindi è anche $a_{n+1} > 1$. Poiché $a_0 = 2 > 1$, si può concludere (per il principio di induzione) che è $a_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e la successione è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Osserviamo ora che $a_1 = 1 + \log a_o = 1 + \log 2 < 2 = a_o$, quindi si potrebbe congetturare che sia $a_{n+1} < a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (successione strettamente decrescente). Per stabilire se ciò è vero, cioè se $1 + \log a_n - a_n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, conviene studiare a parte la funzione (reale di variabile reale)

$$\phi(x) := 1 + \log x - x$$

La funzione ϕ è evidentenmente definita in $(0, +\infty)$, e un facile calcolo mostra che essa è strettamente crescente in $(0, 1]$ e strettamente decrescente in $[1, +\infty)$. Essa ha dunque nel punto 1 un punto di massimo assoluto; poiché è $\phi(1) = 0$, se ne deduce che risulta $\phi(x) < 0$ $\forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Si è già osservato che $a_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; dalle considerazioni precedenti si ottiene quindi

$$\phi(a_n) = 1 + \log a_n - a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

il che prova che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente; si è già osservato che essa è pure inferiormente limitata. Per noti teoremi quindi la successione ammette un limite reale ℓ. Passando al limite, per $n \to +\infty$, nell'uguaglianza

$$a_{n+1} = 1 + \log a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(tenendo conto della continuità del logaritmo), si ottiene

$$\ell = 1 + \log \ell$$

cioè $\phi(\ell) = 0$. Essendosi già osservato che $\phi(x) = 0$ solo per $x = 1$, si conclude che $\ell = 1$.

Da tutte le precedenti considerazioni si ottiene infine:

$$\max a_n = 2, \quad \min a_n \nexists, \quad \sup a_n = 2, \quad \inf a_n = 1, \quad \lim_n a_n = 1$$