Data la successione

$$a_n := \sqrt{n^2+2n+2} - n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

a) stabilire se essa è monotona o almeno definitivamente monotona;

b) calcolare, se esistono:

$$\min_n a_n, \quad \max_n a_n, \quad \inf_n a_n, \quad \sup_n a_n, \quad \lim_n a_n;$$

c) nel caso in cui la successione abbia limite uguale a $\ell \in \mathbb{R}$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $b_n := a_n - \ell$.

Svolgimento. a) Per capire se la successione è monotona (cioè crescente o decrescente), cominciamo a confrontare alcuni elementi di essa. Si ha: $a_o = \sqrt{2}$, $a_1 = \sqrt{5} - 1$, $a_2 = \sqrt{10} - 2$. Si vede facilmente che $a_o > a_1 > a_2$, quindi la successione potrebbe essere strettamente decrescente. Cerchiamo di provarlo: si deve far vedere che $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tale disuguaglianza si scrive

$$\sqrt{n^2+2n+2} - n > \sqrt{(n+1)^2 + 2(n+1) + 2} - (n+1)$$

cioè, con semplici passaggi algebrici,

$$\sqrt{n^2+2n+2} + 1 > \sqrt{n^2+4n+5}$$

Trattandosi di una disuguaglianza tra numeri positivi, essa è equivalente a quella che si ottiene elevando ambo i membri al quadrato:

$$n^2 + 2n + 2 + 2\sqrt{n^2+2n+2} + 1 > n^2 + 4n + 5$$

cioè, ancora con passaggi algebrici:

$$n + 1 < \sqrt{n^2+2n+2} = \sqrt{(n+1)^2+1}$$

la quale è evidentemente vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (si tenga presente che la radice quadrata è una funzione strettamente crescente). Tutte le disuguaglianze finora scritte sono pertanto tra loro equivalenti e vere per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che prova che la successione è strettamente decrescente in $\mathbb{N}$.

Lo studio della monotonia della successione data si poteva anche affrontare diversamente, considerando la funzione di variabile reale

$$f(x) := \sqrt{x^2+2x+2} - x$$

Tale funzione è evidentemente definita in tutto $\mathbb{R}$ e ivi derivabile; la derivata vale

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Si verifica facilmente che tale derivata è negativa in $\mathbb{R}$, quindi per noti teoremi la funzione f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$. D'altra parte si ha $f(n) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, da cui anche la successione data è strettamente decrescente.

b) Poiché la successione è decrescente, il massimo si ottiene dando ad n il primo valore possibile, cioè 0. Si può quindi affermare che

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = a_o = \sqrt{2}$$

(è noto infatti che se il massimo esiste, esso coincide con l'estremo superiore). Per quanto riguarda l'estremo inferiore, per noti teoremi se la successione è decrescente, essa ammette limite e tale limite coincide con il suo estremo inferiore. Ora si ha:

$$\lim_n a_n = \lim_n (\sqrt{n^2+2n+2} - n) = \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+2n+2}-n)(\sqrt{n^2+2n+2}+n)}{\sqrt{n^2+2n+2}+n} =$$

$$= \lim_n \frac{n^2+2n+2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n} = 1$$

Si conclude pertanto che

$$\lim_n a_n = \inf_n a_n = 1$$

mentre non esiste $\min_n a_n$, in quanto evidentemente è $a_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Procedendo in modo simile a quanto fatto precedentemente, si può scrivere

$$b_n = a_n - 1 = \sqrt{n^2+2n+2} - n - 1 = \frac{(\sqrt{n^2+2n+2}-n-1)(\sqrt{n^2+2n+2}+n+1)}{\sqrt{n^2+2n+2}+n+1} =$$

$$= \frac{n^2+2n+2-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Scritta in questo modo la successione b_n, è immediato osservare che essa è infinitesima di ordine 1 (infatti il denominatore $\sqrt{n^2+2n+2}+n$ tende a $+\infty$ di ordine 1, come subito si verifica).