Sia data la successione

$$a_n := n - 2\ln(1+n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

1) Calcolare $\lim_n a_n$ *e stabilire se la successione è monotona;*

2) determinare, se esistono, $\inf_n a_n,\ \sup_n a_n,\ \min_n a_n,\ \max_n a_n$.

Svolgimento. 1) Risulta evidentemente

$$\lim_n a_n = \lim_n\ n\left[1 - \frac{2\ln(n+1)}{n}\right] = +\infty$$

poiché, come è noto, il logaritmo tende a $+\infty$, per n che tende a $+\infty$, di ordine inferiore a qualunque potenza di n.

Cerchiamo ora di stabilire se la successione è monotona, ad esempio crescente (come è suggerito dalla risposta alla domanda precedente). Vediamo per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(1) \qquad\qquad a_{n+1} > a_n$$

cioè

$$(1') \qquad n + 1 - 2\ln(n+2) > n - 2\ln(n+1)$$

Con facili passaggi algebrici, e ricordando le proprietà del logaritmo, si vede che la $(1')$ è equivalente alla

$$(2) \qquad\qquad 1 > 2\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Si può ora osservare che se la (2) è verificata per un certo valore di n, allora è pure verificata da tutti i valori successivi (più grandi). Si ha poi, con facili calcoli:

$$1 < 2\ln 2, \qquad 1 > 2\ln(3/2), \qquad 1 > 2\ln(4/3)$$

cioè il primo valore di n per cui è verificata la (2) (e quindi la (1)) è 1. D'altra parte un calcolo diretto mostra che

$$(3) \qquad a_o = 0, \quad a_1 = 1 - 2\ln 2 < 0, \quad a_2 = 2 - 2\ln 3 = 2(1 - \ln 3) < 0, \quad a_3 = 3 - 2\ln 4 > 0$$

(per scrivere le ultime disuguaglianze basta sapere che $2,71 < e < 2,72$).

A questo punto la (3) ci permette di rispondere completamente alla prima domanda: la successione non è crescente (in quanto ad esempio $a_o > a_1$) e non è neppure decrescente (in quanto ad esempio $a_2 < a_3$).

Si poteva studiare la monotonia della successione anche usando i noti teoremi che collegano la crescenza o decrescenza di una funzione derivabile in un intervallo con il segno della derivata. A tale scopo consideriamo la funzione

$$\phi(x) := x - 2\ln(1+x)$$

Essa è definita in $(-1, +\infty)$, ivi derivabile, e la derivata vale $\phi'(x) = 1 - 2/(1+x)$. Da qui segue, per i citati teoremi, che la funzione ϕ è strettamente decrescente in $(-1, 1]$ e strettamente crescente in $[1, +\infty)$. Da questi fatti è facile dedurre in un altro modo i risultati sulla monotonia della successione già trovati in precedenza.

2) Si è già visto al punto 1) che $\lim_n a_n = +\infty$, da cui segue subito che $\sup_n a_n = +\infty$ mentre $\max_n a_n$ non esiste. Si è pure visto al punto 1) che $a_o = 0$, a_1 e a_2 sono negativi mentre tutti gli altri a_n (per ≥ 3) sono positivi; da ciò abbiamo che il minimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esiste e coincide con a_1 o a_2 (unici valori negativi). Un confronto diretto stabilisce che $\min_n a_n = a_1$.

Si poteva arrivare a questo risultato anche introducendo ed usando la funzione ϕ come spiegato in precedenza. Tale funzione infatti ammette minimo assoluto nel punto 1, che è l'unico punto dove si annulla la derivata ϕ'. Infine, come è noto, se esiste il minimo di un insieme, esso coincide con l'estremo inferiore, quindi è pure

$$\inf_n a_n = \min_n a_n = a_1 = 1 - 2\ln 2$$

$\square$