Si consideri la successione, definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_o = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Studiare le eventuali limitatezza, monotonia e convergenza della successione.

Svolgimento. Cominciamo a dimostrare, per induzione, che risulta $a_n > 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Poiché $a_o = 4 > 3$, basterà provare che $a_{n+1} > 3$ supponendo $a_n > 3$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$).
Ora risulta

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} > \sqrt{3 + 2 \times 3} = 3$$

quindi la disuguaglianza è dimostrata. Vediamo ora la monotonia: si ha banalmente

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} < \sqrt{a_n + 2a_n} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{a_n^2} = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi la successione data è strettamente decrescente. Per noti teoremi essa ammette limite reale (essendo monotona e inferiormente limitata); calcoliamo tale limite.
A questo scopo passiamo al limite nella definizione $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$; posto $\lim_n a_n := \ell$, si ottiene subito

$$\ell = \sqrt{3 + 2\ell}$$

da cui, elevando al quadrato e ricordando che $\ell > 0$,

$$\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$$

Questa equazione algebrica di secondo grado ha le due soluzioni -1 e 3; essendo $\ell > 0$ si conclude che $\ell = 3$.
Essendo la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ strettamente decrescente, si vede anche immediatamente che il massimo di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vale $a_o = 4$, mentre il minimo non esiste, e l'estremo inferiore coincide con il limite e vale 3. $\square$