ESERCIZIO SULLA RICERCA DI ESTREMO SUPERIORE, ESTREMO INFERIORE, MASSIMO E MINIMO PER UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme definito da

$$A = \left\{ \frac{|3x+1|}{|4x-1|+1} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A e, se esistono, il massimo ed il minimo di A.

Svolgimento dell'esercizio

1. **L'estremo superiore di A.**

Per trovare $\sup(A)$, determiniamo l'insieme $M(A)$ dei maggioranti di A.
Sia $k \in \mathbb{R}$. Allora

$$k \in M(A) \iff \frac{|3x+1|}{|4x-1|+1} \le k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Osserviamo inoltre che un maggiorante di A è necessariamente positivo, dato che A contiene elementi positivi (ad esempio, ponendo $x = 0$ si ottiene che $A \ni \frac{1}{|-1|+1} = \frac{1}{2} > 0$); pertanto non è restrittivo supporre $k > 0$.
Supponiamo dunque $k > 0$. Da (1.1) segue che $k \in M(A)$ se e solo se l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{|3x+1|}{|4x-1|+1} \le k \tag{1.2}$$

è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Risolviamo quindi la disequazione (1.2).
Sia S l'insieme delle soluzioni di (1.2). Dato $x \in \mathbb{R}$, essendo il denominatore $|4x-1|+1$ positivo si ha che

$$x \in S \iff |3x+1| \le k(|4x-1|+1)$$

e quindi, usando le proprietà del valore assoluto (e tenendo conto che $k > 0$),

$$\begin{aligned}
x \in S &\iff -k|4x-1| - k \le 3x+1 \le k|4x-1| + k \\
&\iff \begin{cases} 3x+1 \le k|4x-1| + k \\ 3x+1 \ge -k|4x-1| - k \end{cases} \iff \begin{cases} k|4x-1| \ge 3x+1-k \\ k|4x-1| \ge -3x-1-k \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k(4x-1) \ge 3x+1-k \quad \text{oppure} \quad k(4x-1) \le -3x-1+k \\ k(4x-1) \ge -3x-1-k \quad \text{oppure} \quad k(4x-1) \le 3x+1+k \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (4k-3)x \ge 1 \quad \text{oppure} \quad (4k+3)x \le 2k-1 \\ (4k+3)x \ge -1 \quad \text{oppure} \quad (4k-3)x \le 2k+1 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Osserviamo che, essendo $k > 0$, si ha $4k+3 > 0$; $4k-3$, invece, può cambiare segno (è positivo se $k > \frac{3}{4}$, è negativo se $k < \frac{3}{4}$ e si annulla se $k = \frac{3}{4}$). Per $k = \frac{3}{4}$, da (2.3) segue che

$$\begin{aligned}
x \in S &\iff \begin{cases} 0 \ge 1 \quad \text{oppure} \quad (4 \cdot \frac{3}{4} + 3)x \ge 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \\ (4 \cdot \frac{3}{4} + 3)x \ge -1 \quad \text{oppure} \quad 0 \le 2 \cdot \frac{3}{4} + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 \ge 1 \quad \text{oppure} \quad 6x \le \frac{1}{2} \\ 6x \ge -1 \quad \text{oppure} \quad 0 \le \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 6x \le \frac{1}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \le \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Quindi per $k = \frac{3}{4}$ si ha che $S = \left(-\infty, \frac{1}{12}\right] \ne \mathbb{R}$. Ma allora $\frac{3}{4}$ non è un maggiorante di A; di conseguenza, non sono maggioranti di A neanche i numeri reali che sono minori di $\frac{3}{4}$. Pertanto non è restrittivo supporre $k > \frac{3}{4}$, e cioè $4k-3 > 0$. Da (1.3) si ottiene allora che, dato $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$x \in S \iff \begin{cases} x \ge \frac{1}{4k-3} \quad \text{oppure} \quad x \le \frac{2k-1}{4k+3} \\ x \ge -\frac{1}{4k+3} \quad \text{oppure} \quad x \le \frac{2k+1}{4k-3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \frac{1}{4k-3} \\ x \ge -\frac{1}{4k+3} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{4k-3} \\ x \leq \frac{2k+1}{4k-3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq \frac{2k-1}{4k+3} \\ x \geq -\frac{1}{4k+3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq \frac{2k-1}{4k+3} \\ x \leq \frac{2k+1}{4k-3} \end{cases}$$

$$\iff \quad x \geq \max\left\{\tfrac{1}{4k-3}, -\tfrac{1}{4k+3}\right\} \quad \text{oppure} \quad \tfrac{1}{4k-3} \leq x \leq \tfrac{2k+1}{4k-3}$$

$$\text{oppure} \quad -\tfrac{1}{4k+3} \leq x \leq \tfrac{2k-1}{4k+3} \quad \text{oppure} \quad x \leq \min\left\{\tfrac{2k-1}{4k+3}, \tfrac{2k+1}{4k-3}\right\}.$$

Osserviamo che $-\frac{1}{4k+3} < 0 < \frac{1}{4k-3}$ e quindi $\max\left\{\frac{1}{4k-3}, -\frac{1}{4k+3}\right\} = \frac{1}{4k-3}$; inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{2k-1}{4k+3} - \frac{2k+1}{4k-3} &= \frac{(2k-1)(4k-3) - (2k+1)(4k+3)}{(4k+3)(4k-3)} \\ &= \frac{8k^2 - 10k + 3 - (8k^3 + 10k + 3)}{(4k+3)(4k-3)} = \frac{-20k}{(4k+3)(4k-3)} < 0 \end{aligned}$$

e quindi $\min\left\{\frac{2k-1}{4k+3}, \frac{2k+1}{4k-3}\right\} = \frac{2k-1}{4k+3}$. Da (1.4) segue allora che

$$\begin{aligned} x \in S \quad \iff \quad & x \geq \tfrac{1}{4k-3} \\ & \text{oppure} \quad \tfrac{1}{4k-3} \leq x \leq \tfrac{2k+1}{4k-3} \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{4k+3} \leq x \leq \tfrac{2k-1}{4k+3} \quad \text{oppure} \quad x \leq \tfrac{2k-1}{4k+3} \\ \iff \quad & x \geq \tfrac{1}{4k-3} \quad \text{oppure} \quad x \leq \tfrac{2k-1}{4k+3}. \end{aligned}$$

Perciò $S = \left(-\infty, \frac{2k-1}{4k+3}\right] \cup \left[\frac{1}{4k-3}, +\infty\right)$. Ma allora

$$S = \mathbb{R} \quad \iff \quad \frac{2k-1}{4k+3} \geq \frac{1}{4k-3}. \tag{1.5}$$

Ricordando che $4k+3$, $4k-3$ e k sono positivi, da (1.5) otteniamo che

$$\begin{aligned} S = \mathbb{R} \quad \iff \quad & (2k-1)(4k-3) \geq 4k+3 \quad \iff \quad 8k^2 - 10k + 3 \geq 4k + 3 \\ \iff \quad & 8k^2 - 14k \geq 0 \quad \iff \quad 4k - 7 \geq 0 \quad \iff \quad k \geq \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

e cioè $k \in M(A)$ se e solo se $k \geq \frac{7}{4}$.
Perciò $M(A) = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$, e quindi $\sup(A) = \frac{7}{4}$.

2. **A ammette massimo?**

Dal punto 1 segue che A ammette massimo se e solo se $\frac{7}{4} \in A$.
Ponendo $x = \frac{1}{4}$, si ottiene che

$$A \ni \frac{|3 \cdot \frac{1}{4} + 1|}{|4 \cdot \frac{1}{4} - 1| + 1} = \frac{\frac{7}{4}}{1} = \frac{7}{4}.$$

Perciò A ammette massimo e $\max(A) = \frac{7}{4}$.

3. **Estremo inferiore di A ed esistenza del minimo.**

Osserviamo innanzitutto che $\frac{|3x+1|}{|4x-1|+1} \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Pertanto 0 è un <u>minorante</u> di A. D'altra parte, ponendo $x = -\frac{1}{3}$, si ottiene che

$$A \ni \frac{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right|}{\left|4\left(-\frac{1}{3}\right) - 1\right| + 1} = 0.$$

Perciò A ammette minimo e $\min(A) = 0$; di conseguenza, $\inf(A) = 0$.

N.B. Per determinare l'estremo superiore (ed il massimo), si può anche procedere diversamente, utilizzando la monotonia di un'opportuna funzione; nelle pagine seguenti, vediamo uno svolgimento alternativo dei punti 1 e 2 dell'esercizio.

Ricerca dell'estremo superiore (e del massimo): svolgimento alternativo.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{|3x+1|}{|4x-1|+1}.$$

È immediato osservare che $A = Im(f)$. Per determinare l'estremo superiore di A è allora utile studiare la monotonia di f; per semplificare la forma di f, conviene suddividere $\mathbb{R}$ in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali gli argomenti dei due moduli che compaiono nell'espressione di f abbia segno costante, e quindi studiare la funzione in ciascuno di tali intervalli separatamente.

Osserviamo che

$$3x+1 \begin{cases} > 0 & \text{se } x > -\frac{1}{3} \\ = 0 & \text{se } x = -\frac{1}{3} \\ < 0 & \text{se } x < -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad 4x-1 \begin{cases} > 0 & \text{se } x > \frac{1}{4} \\ = 0 & \text{se } x = \frac{1}{4} \\ < 0 & \text{se } x < \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Conviene quindi suddividere $\mathbb{R}$ nei tre intervalli chiusi I_1, I_2 e I_3, dove

$$I_1 = \left[\tfrac{1}{4}, +\infty\right), \qquad I_2 = \left[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}\right], \qquad I_3 = \left(-\infty, -\tfrac{1}{3}\right].$$

(a) Cominciamo con lo studiare f nell'intervallo I_1, tenendo conto del fatto che, se $x \in I_1$, si ha che $3x+1 \geq 0$ e $4x-1 \geq 0$. Perciò, $\forall\, x \in I_1$,

$$f(x) = \frac{3x+1}{4x-1+1} = \frac{3x+1}{4x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4x}.$$

Osserviamo che la funzione

$$f_1 : I_1 \ni x \longmapsto \frac{1}{4x} \in \mathbb{R}$$

è strettamente decrescente, in quanto funzione reciproca della funzione $I_1 \ni x \longmapsto 4x \in \mathbb{R}$, che è strettamente crescente e a valori positivi . Quindi f, che in I_1 differisce da f_1 per una costante, è strettamente decrescente in I_1. Possiamo quindi scrivere

$$(a.1) \qquad\qquad f(x) \leq f(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{7}{4} \qquad \forall\, x \in I_1.$$

(b) Consideriamo ora l'intervallo I_2. In tale intervallo si ha che $3x+1 \geq 0$, $4x-1 \leq 0$; quindi, $\forall\, x \in I_2$,

$$f(x) = \frac{3x+1}{1-4x+1} = \frac{3x+1}{2-4x} = \frac{\frac{3}{4}(4x)+1}{2-4x} = \frac{\frac{3}{4}(4x-2)+\frac{3}{2}+1}{2-4x} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-2x}\right).$$

Poiché la funzione $I_2 \ni x \longmapsto 1-2x \in \mathbb{R}$ è strettamente decrescente e a valori positivi, ne segue che la funzione $I_2 \ni x \longmapsto \frac{1}{1-2x} \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente; di conseguenza, è strettamente crescente anche la funzione

$$f_2 : I_2 \ni x \longmapsto \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-2x}\right) \in \mathbb{R},$$

che si ottiene moltiplicando la precedente funzione per una costante positiva. Ma allora f, che in I_2 differisce da f_2 per una costante, è strettamente crescente in I_2. Pertanto

$$(b.1) \qquad\qquad f(-\tfrac{1}{3}) \leq f(x) \leq f(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{7}{4} \qquad \forall\, x \in I_2.$$

(c) Consideriamo infine l'intervallo I_3. Poiché in tale intervallo si ha che $3x+1 \leq 0$, $4x-1 \leq 0$, $\forall\, x \in I_3$ si può scrivere

$$(c.1)\quad f(x) = \frac{-3x-1}{1-4x+1} = \frac{3x+1}{4x-2} = \frac{\frac{3}{4}(4x)+1}{4x-2} = \frac{\frac{3}{4}(4x-2)+\frac{3}{2}+1}{4x-2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2x-1}\right).$$

Quindi, essendo $2x-1<0 \ \forall\, x \in I_3$ (ricordiamo che $I_3 = \big(-\infty, -\frac{1}{3}\big]$), si ha che

$$(c.2)\qquad f(x) < \tfrac{3}{4} < \tfrac{7}{4} \qquad \forall\, x \in I_3.$$

Poiché $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \mathbb{R}$, dalle $(a.1)$, $(b.1)$, $(c.2)$ si conclude che

$$f(x) \leq \tfrac{7}{4} = f(\tfrac{1}{4}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\sup\big(Im(f)\big) = \max\big(Im(f)\big) = \tfrac{7}{4}$$

(l'estremo superiore è anche il massimo in quanto il valore $\frac{7}{4}$ viene assunto dalla funzione nel punto $\frac{1}{4}$). Poiché $Im(f) = A$, ne segue che

$$\sup(A) = \max(A) = \tfrac{7}{4}.$$