Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)-2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

a) Stabilire di che tipo è l'equazione.

b) Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali α e β per i quali esiste ed è unica la soluzione in un intorno del punto iniziale.

c) Calcolare, se esiste, la soluzione in un intorno del punto iniziale nel caso $\alpha = \beta = 0$.

d) Determinare un intorno del punto iniziale in cui la soluzione di cui alla domanda precedente è certamente definita.

a) L'equazione è del tipo $y'(x) = f(x)g[y(x)]$, essendo $f(x) := e^{-2}\log(x+\sqrt{1+x^2})$ e $g(y) := e^y$, cioè a variabili separabili.

b) Si osserva che l'argomento del logaritmo nella definizione di f è positivo per ogni x in $\mathbb{R}$, quindi la funzione f è definita in $\mathbb{R}$ ed evidentemente continua (in quanto composta di funzioni continue). Inoltre la funzione g è anch'essa definita in $\mathbb{R}$ e ivi di classe C^1 (anzi, in realtà sia f sia g sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$). Ciò basta a concludere che il problema di Cauchy dato ha una ed una sola soluzione, definita in un opportuno intorno del punto iniziale, qualunque siano i parametri reali α e β. Si può anche osservare che la funzione g non si annulla mai, quindi non esistono soluzioni costanti del problema dato (qualunque siano α e β).

c) Per quanto già osservato, possiamo direttamente separare le variabili e scrivere, tenendo anche conto delle condizioni iniziali e integrando tra 0 e x,

$$\int_0^x e^{-y(t)}y'(t)\,dt = e^{-2}\int_0^x \log(t+\sqrt{1+t^2})\,dt$$

Il primo integrale si calcola facilmente colla sostituzione $y(t) = u$, mentre il secondo si può calcolare per parti assumendo 1 come fattore differenziale e $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ come fattore finito. Si ottiene così

$$(1) \quad -e^{-y(x)}+1 = e^{-2}\int_0^x \log(t+\sqrt{1+t^2})\,dt = e^{-2}[x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+1]$$

Pertanto

$$e^{-y(x)} = 1 - e^{-2}[x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}+1]$$

e quindi, considerando $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^{-2}[x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}+1] > 0\}$, per $x \in A$ risulta

$$y(x) = -\log\left\{1 - e^{-2}\left[x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}+1\right]\right\},$$

perciò y è soluzione in ogni intervallo contenuto in A e contenente 0.

d) Basta determinare un intervallo, contenente 0, in cui valga

$$\phi(x) := x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 < e^2$$

In base ai calcoli precedenti, la derivata della ϕ vale

$$\phi'(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

e, come facilmente si verifica, si annulla per $x = 0$, mentre è negativa se $x < 0$ ed è positiva se $x > 0$. Da ciò e dal fatto che $\phi(0) = 0$ segue che se si trovano due punti x_1, x_2 con $x_1 < 0 < x_2$ e $\phi(x_1) < e^2$, $\phi(x_2) < e^2$, allora la disuguaglianza $\phi(x) < e^2$ è verificata in tutto l'intervallo (x_1, x_2).

Come primo tentativo scegliamo ad esempio $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Si ha con facili calcoli:

$\phi(-1) = -\log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} + 1 < \log\left(\frac{1}{1{,}41-1}\right) - \sqrt{2} + 1 < \log(2,44) - 1,4 + 1 < 0,6$

$\phi(1) = \log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} + 1 < \log(2,42) - 1,4 + 1 < 0,6$

(Per ottenere queste disuguaglianze si è tenuto conto delle proprietà dei logaritmi e del fatto che $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ e $2,44 < e$).

Poiché i valori trovati per $\phi(-1)$ e $\phi(1)$ sono entrambi minori di e^2, si conclude che la soluzione dell'equazione differenziale calcolata è certamente definita (almeno) nell'intervallo $(-1, 1)$. $\square$

(Questo svolgimento è stato scritto colla collaborazione e le correzioni della prof. Ada Aruffo, che volentieri ringrazio.)