Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y(x)+1]^3 \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
c) Per $k = -1$ e $k = -2$, trovare la soluzione del problema di Cauchy in un intorno di 0, determinando esplicitamente un intorno di 0 in cui tale soluzione è definita.

Svolgimento. a) L'equazione è evidentemente del primo ordine (perché compare solo la derivata prima della funzione incognita $y(x)$ e non le derivate di ordine superiore), ed è **a variabili separabili**: infatti del tipo $y'(x) = f(x)g[y(x)]$, ove $f : x \to f(x)$ è una funzione definita in un intorno del punto iniziale x_o e $g : u \to g(u)$ è una funzione definita in un intorno del valore iniziale y_o (nel nostro caso è $x_o = 0$, $y_o = k$,
$f(x) = \arctan x,\ g(u) = (1+u)^3$).

b) In base alla teoria, il problema di Cauchy per le equazioni a variabili separabili ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale se f è continua in un intorno del punto iniziale x_o e se g soddisfa almeno una delle seguenti due condizioni: g continua in un intorno del valore iniziale y_o con $g(y_o) \neq 0$ oppure g di classe C^1 in un intorno del valore iniziale y_o. Nel nostro caso si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ g \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi il problema ha una ed una sola soluzione, definita in un intorno del punto iniziale (nel nostro caso $x_o = 0$), qualunque sia il valore di k.

c) Se $k = -1$ si ha $g(k) = g(-1) = 0$ quindi, in base alla teoria, il problema di Cauchy ha l'unica soluzione (costante) $y(x) = -1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Sia ora $k = -2$; in questo caso risulta evidentemente $g(k) = g(-2) \neq 0$ quindi possiamo separare le variabili in un intorno del punto iniziale $x_o = 0$. Si ha quindi (chiamando ora t la variabile indipendente):

$$\frac{y'(t)}{[y(t)+1]^3} = \arctan t$$

Possiamo ora procedere all'integrazione tra 0 e x, tenendo presente la condizione iniziale che ora è $y(0) = -2$; si ha quindi

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{[y(t)+1]^3}\,dt = \int_0^x \arctan t\,dt$$

e ricordando il teorema di integrazione per sostituzione (poniamo ad esempio $y(x) = u$)

$$\int_{-2}^{y(x)} \frac{1}{(u+1)^3}\,du = \int_0^x \arctan t\,dt$$

È facile calcolare le primitive sia al primo sia al secondo membro; si ottiene

$$\left[-\frac{1}{2(u+1)^2}\right]_0^{y(x)} = \left[t\arctan t - (1/2)\ln(1+t^2)\right]_0^x$$

da cui

$$-\frac{1}{2[y(x)+1]^2} + \frac{1}{2} = x\arctan x - (1/2)\ln(1+x^2)$$

e infine, con un po' di algebra elementare

$$y(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{\ln(1+x^2) + 1 - 2x\arctan x}}$$

Resta solo da determinare un intorno del punto iniziale 0 in cui la soluzione è certamente definita. Data l'esistenza di una radice quadrata al denominatore, l'unica condizione da porre è che il radicando sia positivo. Dobbiamo cioè determinare un intervallo in cui sia

$$(*) \qquad \ln(1 + x^2) + 1 - 2x \arctan x > 0$$

Osserviamo che $\ln(1+x^2) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre che $|\arctan x| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$. Da ciò segue che la $(*)$ è certamente verificata se $1 - 2x^2 > 0$, cioè nell'intervallo $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.