Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{-ax} - 1 + 2x}{x^2} + x & \text{se } x \neq 0 \\ b & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1) determinare gli eventuali valori dei parametri reali a e b tali che la funzione sia continua in 0;
2) determinare gli eventuali valori dei parametri reali a e b tali che la funzione sia derivabile in 0;
3) calcolare $f'(x)$ se $x \neq 0$.

Svolgimento. 1) Per definizione, f è continua in 0 se e solo se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Cominciamo pertanto a vedere se esistono dei valori del parametro reale a per i quali il limite suddetto esista reale. Si ha evidentemente, se $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{e^{-ax} - 1 + 2x + x^3}{x^2} \tag{1}$$

Il numeratore e il denominatore di questo rapporto sono funzioni definite e continue in $\mathbb{R}$, nulle in 0; pertanto il limite da calcolare si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Per calcolare il limite possiamo applicare lo sviluppo dell'esponenziale colla formula di Mac Laurin. Come è noto si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

da cui, ponendo $t = -ax$, risulta

$$e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3) \tag{2}$$

Dalle (1), (2) segue

$$f(x) = \frac{1 - ax + a^2x^2/2 - a^3x^3/6 + o(x^3) - 1 + 2x + x^3}{x^2} = \tag{3}$$

$$= \frac{(2-a)x + (a^2/2)x^2 + (1 - a^3/6)x^3 + o(x^3)}{x^2} =$$

$$= \frac{2-a}{x} + \frac{a^2}{2} + \left(1 - \frac{a^3}{6}\right)x + o(x)$$

Da questa uguaglianza si vede che se $a \neq 2$ non esiste il $\lim_{x\to 0} f(x)$, mentre se $a = 2$ tale limite esiste e vale 2, cioè

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \qquad \text{se } a = 2$$

A questo punto, visto che per definizione è $f(0) = b$, abbiamo che la funzione f è continua in 0 se e solo se risulta $a = b = 2$.

Naturalmente si poteva calcolare il limite, per $x \to 0$, della funzione f in (1) anche in altri modi, ad esempio attraverso il teorema di De L'Hôpital (le cui ipotesi si possono facilmente verificare). Consideriamo a tale scopo il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore della funzione f in (1): tale limite si scrive

$$\lim_{x\to 0} \frac{-ae^{-ax} + 2 + 3x^2}{2x}$$

Si vede facilmente che se $a \neq 2$ tale limite non esiste, mentre se $a = 2$ il limite vale 2 (si applichi nuovamente il teorema di De L'Hôpital, oppure si ricordi un noto limite notevole).

2) Come è noto, se una funzione (di una sola variabile) è derivabile in un punto, essa è ivi anche continua. Ne segue che, per rispondere alla domanda 2), basterà verificare se la funzione f è devivabile in 0 nel caso $a = b = 2$, perché in tutti gli altri casi essa non può essere derivabile non essendo continua.
Consideriamo dunque il rapporto incrementale di f nel punto 0 (con $a = b = 2$) utilizzando la (3). Si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2 - (1/3)x + o(x) - 2}{x} = -\frac{1}{3} + \frac{o(x)}{x}$$

Risulta pertanto evidentemente

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{3}$$

e si conclude che f (nel caso $a = b = 2$) è derivabile in 0 e si ha $f'(0) = -1/3$.

3) La derivata $f'(x)$, quando $x \neq 0$, si calcola colle solite regole di derivazione. Si ha quindi banalmente

$$f'(x) = \frac{(-ae^{-ax} + 2)x^2 - 2x(e^{-ax} - 1 + 2x)}{x^4} + 1 = \frac{-(ax + 2)e^{-ax} - 2x + 2}{x^3} + 1$$