Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} k[\sin(\pi^2 x) - \pi^2 x/4 + \pi/4] & \text{se } x \leq 1/\pi \\ \pi/(\pi x + 1) - \sin(1/x) - (\pi/2)e^{-(x-1/\pi)^2} & \text{se } x > 1/\pi \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

a) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f è continua in $\mathbb{R}$.

b) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$.

c) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f ammette derivata seconda in $\mathbb{R}$.

d) Calcolare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$. (Suggerimento: considerare il cambiamento di variabili $t = 1/x$).

Svolgimento. a) Poniamo per comodità

$$f_1(x) := \sin(\pi^2 x) - \pi^2 x/4 + \pi/4, \qquad f_2(x) := \pi/(\pi x + 1) - \sin(1/x) - (\pi/2)e^{-(x-1/\pi)^2}$$

Queste due funzioni sono evidentemente continue dove sono definite; risulta inoltre $f_1(1/\pi) = 0$ e per la continuità $\lim_{x\to 1/\pi} f_1(x) = 0$. Per quanto riguarda f_2, si ha analogamente $f_2(1/\pi) = 0$ e $\lim_{x\to 1/\pi} f_2(x) = 0$. Da queste osservazioni, tenuta presente la definizione di f, si ottiene immediatamente

$$f(1/\pi) = 0 = \lim_{x\to 1/\pi^-} f(x) = \lim_{x\to 1/\pi^+} f(x)$$

cioè f è continua in $1/\pi$, qualunque sia il valore del parametro reale k. Negli altri punti di $\mathbb{R}$ la funzione f è evidentemente continua per la già osservata continuità delle funzioni f_1 e f_2.

b) La funzione f è evidentemente derivabile, per i noti teoremi, nei punti diversi da $1/\pi$; occorre quindi studiare la derivabilità di f solo nel punto $1/\pi$. A tale scopo si può procedere in due modi, entrambi corretti. Possiamo ricorrere alla definizione di derivata: come sappiamo, la derivata della funzione non è altro che il limite del rapporto incrementale, se tale limite esiste ed è reale. Possiamo quindi studiare l'eventuale esistenza di tale limite per la funzione f nel punto $1/\pi$, tenendo presente che la funzione ha espressioni diverse a sinistra e a destra di tale punto, per cui studieremo separatamente il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale.

Si ha:

$$\lim_{x\to 1/\pi^-} \frac{f(x) - f(1/\pi)}{x - 1/\pi} = \lim_{x\to 1/\pi^-} \frac{k[\sin(\pi^2 x) - \pi^2 x/4 + \pi/4]}{x - 1/\pi} = -(5/4)k\pi^2$$

(Si può pervenire facilmente a questo risultato con i limiti notevoli, dopo aver effettuato ad esempio il cambio di variabile $x - 1/\pi = t$, oppure applicando il teorema di De L'Hospital).

Si trova poi analogamente

$$\lim_{x\to 1/\pi^+} \frac{f(x)-f(1/\pi)}{x-1/\pi} = \lim_{x\to 1/\pi^+} \frac{\pi/(\pi x+1) - \sin(1/x) - (\pi/2)e^{-(x-1/\pi)^2}}{x-1/\pi} = -(5/4)\pi^2$$

Dal confronto del limite destro e del limite sinistro del rapporto incrementale, si deduce che la funzione f è derivabile nel punto $1/\pi$ se e solo se $k=1$.

Un altro modo di studiare le derivabilità della funzione f nel punto $1/\pi$ consiste nell'applicare un noto corollario del teorema di Lagrange: se una funzione g è continua in un punto x_o e derivabile sia in un intorno destro di x_o sia in un intorno sinistro (senza sapere se la funzione è derivabile anche in x_o), e se risulta $\lim_{x\to x_o^-} g'(x) = \lim_{x\to x_o^+} g'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, allora g è derivabile anche in x_o e $g'(x_o)=\ell$.

Possiamo applicare questo risultato alla funzione f e al punto $1/\pi$; abbiamo infatti già verificato che la funzione è continua in tale punto (qualunque sia $k \in \mathbb{R}$), mentre essa è evidentemente derivabile in tutti i punti diversi da $1/\pi$. Si ha infatti, con facili calcoli:

$$f'(x) = \begin{cases} kf_1'(x) = k[\pi^2\cos(\pi^2 x) - \pi^2/4] & \text{se } x < 1/\pi \\ f_2'(x) = -\pi^2/(\pi x+1)^2 + (1/x)^2\cos(1/x) + \pi(x-1/\pi)e^{-(x-1/\pi)^2} & \text{se } x > 1/\pi \end{cases}$$

da cui subito

$$\lim_{x\to 1/\pi^-} f'(x) = -(5/4)k\pi^2, \qquad \lim_{x\to 1/\pi^+} f'(x) = -(5/4)\pi^2$$

Si conclude, in base al corollario precedentemente riportato, che la funzione f è derivabile nel punto $1/\pi$ se e solo se $k=1$.

c) Per quanto riguarda la derivata seconda di f nel punto $1/\pi$, si possono fare considerazioni analoghe a quelle svolte per la derivata prima. Limitiamoci per semplicità ad applicare come precedentemente il citato corollario al teorema di Lagrange, dopo aver osservato che, in base ai calcoli precedenti, se $k=1$ la funzione f è derivabile in $1/\pi$ e la derivata f' è continua in tale punto. Andiamo allora a calcolare la derivata seconda di f separatamente per $x<1/\pi$ e per $x>1/\pi$ (beninteso con $k=1$): si ha

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = -\pi^4\sin(\pi^2 x) \quad \text{se } x < 1/\pi \\ f_2''(x) = 2\pi^3/(\pi x+1)^3 + (1/x)^4\sin(1/x) + \pi[1-2(x-1/\pi)^2]e^{-(x-1/\pi)^2} \\ \qquad \text{se } x > 1/\pi \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 1/\pi^-} f''(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1/\pi^+} f''(x) = (\pi^3/4)+\pi$$

Poiché i limiti sinistro e destro della derivata seconda nel punto $1/\pi$ esistono ma sono diversi, si può concludere che la derivata seconda di f in tale punto non esiste. (Infatti il citato corollario del teorema di Lagrange afferma, più precisamente, che se esiste il limite destro della derivata in un punto, finito o infinito, esso è uguale al limite destro del rapporto incrementale in quel punto; stesso discorso per il limite sinistro. Quindi in sostanza abbiamo provato che il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale di f' in $1/\pi$ sono diversi: quindi non esiste la derivata seconda di f in $1/\pi$).

d) Possiamo preliminarmente semplificare il problema osservando che, se la funzione $g(x) := \pi/(\pi x + 1) - \sin(1/x)$ ammette ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$, si può ignorare l'ultimo addendo (esponenziale) nella definizione di f_2, perché avrà ordine di infinitesimo certamente superiore. Limitiamoci pertanto, per il momento, a studiare l'ordine di infinitesimo di g per $x \to +\infty$; come suggerito, operiamo il cambiamento di variabile $x = 1/t$ e quindi studiamo l'ordine di nfinitesimo della funzione

$$h(t) := \frac{\pi}{\pi/t + 1} - \sin t = \frac{\pi t}{\pi + t} - \sin t \qquad \text{per } t \to 0$$

Consideriamo ora lo sviluppo di Mac Laurin della funzione h; con facili calcoli si vede che

$$h(0) = 0,\ h'(0) = 0,\ h''(0) = -2/\pi$$

da cui subito

$$h(t) = -(1/\pi)t^2 + o(t^2)$$

la quale ci dice che la funzione h è infinitesima, per $t \to 0$, di ordine 2 (rispetto all'infinitesimo campione t). Tornando alla variabile x, abbiamo che la funzione g è infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine 2 (rispetto all'infinitesimo campione $1/x$). Aggiungendo a g la funzione esponenziale $e^{-(x-1/\pi)^2}$ non cambia il suo ordine di infinitesimo, in quanto come è noto la funzione esponenziale e^{-x} tende a zero, per $x \to +\infty$, di ordine superiore a qualunque potenza di $1/x$. Si conclude quindi che la data funzione f è infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine 2.