Esercizio 1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) := \ln(x^2 + 1) - 3x \sin x + 2x^2$$

1) È vero che f è infinitesima per $x \to 0$?
2) Determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.
3) Calcolare (se esiste) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4) Determinare (se esiste) l'ordine di infinito di f per $x \to +\infty$.

Svolgimento. 1) La funzione f è continua in $\mathbb{R}$, in quanto somma di tre funzioni continue (un polinomio, la composta di un polinomio con il logaritmo naturale ed il prodotto di un polinomio per la funzione seno); perciò $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \ln 1 = 0$.

2) Osserviamo che f è somma di tre infinitesimi di ordine 2 per $x \to 0$: infatti, uno dei tre addendi è un multiplo dell'infinitesimo campione di ordine 2 per $x \to 0$; per quanto riguarda gli altri due addendi, utilizzando due noti limiti notevoli otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-3x\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin x}{x} = -3.$$

A priori, possiamo quindi concludere solo che f è infinitesima di ordine superiore o uguale a 2 per $x \to 0$. Per cercare di determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$, utilizziamo due noti sviluppi di Mac Laurin, e cioè quelli della funzione che a t associa $\ln(t+1)$ e della funzione seno.
Poiché

$$\ln(t+1) = t - \tfrac{1}{2}\, t^2 + o(t^2) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

ne segue che

$$\ln(x^2+1) = x^2 - \tfrac{1}{2}\, x^4 + o(x^4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Inoltre, dato che

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}\, x^3 + o(x^3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

si ha che

$$3x\sin x = 3x^2 - \tfrac{1}{2}\, x^4 + o(x^4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Da (1) e (2) otteniamo che

$$f(x) = \cancel{x}^2 - \tfrac{1}{2}\cancel{x}^4 - 3\cancel{x}^2 + \tfrac{1}{2}\cancel{x}^4 + 2\cancel{x}^2 + o(x^4) = o(x^4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Quindi al momento possiamo solo concludere che f è infinitesima di ordine superiore a 4 per $x \to 0$. Per tentare di determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$, proviamo a sviluppare ulteriormente le funzioni coinvolte.
Ricordiamo che

$$\ln(t+1) = t - \tfrac{1}{2}\, t^2 + \tfrac{1}{3}\, t^3 + o(t^3) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\ln(x^2+1) = x^2 - \tfrac{1}{2}\, x^4 + \tfrac{1}{3}\, x^6 + o(x^6) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Da

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}\, x^3 + \tfrac{1}{120}\, x^5 + o(x^5) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ricaviamo inoltre che

$$3x\sin x = 3x^2 - \tfrac{1}{2}\, x^4 + \tfrac{1}{40}\, x^6 + o(x^6) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Da (4) e (5) (tenendo conto delle semplificazioni già ottenute in (3)) segue ora che

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\, x^6 - \tfrac{1}{40}\, x^6 + o(x^6) = \tfrac{37}{120}\, x^6 + o(x^6) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto f è infinitesima di ordine 6 per $x \to 0$.

3) Osserviamo innanzitutto che, $\forall\ x \in (0,+\infty)$ (ossia in un intorno di $+\infty$ in cui la x non si annulla ed inoltre è definito $\ln x$), si ha

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad f(x) = \ln(x^2+1) - 3x\sin x + 2x^2 &= x^2\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} - \frac{3\sin x}{x} + 2\right) \\
&= x^2\left(\frac{\ln\bigl(x^2(1+\frac{1}{x^2})\bigr)}{x^2} - \frac{3\sin x}{x} + 2\right) \\
&= x^2\left(\frac{2\ln x}{x^2} + \frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x^2}\bigr)}{x^2} - \frac{3\sin x}{x} + 2\right).
\end{aligned}
$$

Per un noto limte notevole, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. Inoltre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\bigl(1+\frac{1}{x^2}\bigr) = \ln 1 = 0$ e quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+1/x^2)}{x^2} = 0$. Infine, essendo la funzione seno limitata, si ha che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Pertanto

$$
(7) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x^2} + \frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x^2}\bigr)}{x^2} - \frac{3\sin x}{x} + 2\right) = 2.
$$

Da (6) e (7) otteniamo ora che

$$
\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.
$$

4) Da (6) e (7) segue che, in un intorno di $+\infty$, f è il prodotto dell'<u>infinito campione di ordine 2</u> per $x \to +\infty$ e di una funzione che ammette limite <u>finito e diverso da zero</u> per $x \to +\infty$. Di conseguenza, f è <u>infinita di ordine 2</u> per $x \to +\infty$.

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$
f(x,y) := \frac{xy}{|e^{\sin x}-1| + \ln(1+|y|)}
$$

a) determinarne l'insieme di definizione;
b) stabilire se essa è prolungabile per continuità nei punti $(0,0)$ *e* $(\pi,0)$*;*
c) per gli eventuali punti di cui alla domanda precedente per i quali la risposta sia affermativa, stabilire se la funzione prolungata per continuità è differenziabile nel punto.

Svolgimento. a) Il numeratore e il denominatore sono funzioni definite in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi la funzione data è definita in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali non si annulli il denominatore. Si osserva che i due addendi al denominatore sono non negativi, quindi il denominatore si annulla **solo** nei punti in cui entrambi gli addendi al denominatore sono nulli. La funzione $x \to |e^{\sin x}-1|$ si annulla tutte le volte che $\sin x = 0$, cioè nei punti del tipo $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. L'altra funzione al denominatore, cioè $y \to \ln(1+|y|)$, si annulla invece solo nel punto $y = 0$. Per ottenere l'insieme di definizione di f dobbiamo pertanto togliere da $\mathbb{R}^2$ tutti i punti del tipo $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$; si ottiene così

$$
I_f = \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} \{(k\pi,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (k\pi,0),\ k \in \mathbb{Z}\}
$$

(dove I_f indica l'insieme di definizione di f).

b) Come si è visto al punto precedente, i due punti $(0,0)$ e $(\pi,0)$ non appartengono ad I_f ma sono evidentemente punti di accumulazione di I_f, pertanto la domanda ha senso. Cominciamo a considerare il punto $(0,0)$. Si osserva che la funzione f è nulla nei punti degli assi coordinati che stanno in I_f, da cui si deduce che se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, tale limite è necessariamente 0. Proviamo dunque a maggiorare la nostra funzione, in un intorno bucato di $(0,0)$ e fuori degli assi, con una funzione chiaramente infinitesima. Si ha, se $(x,y) \in I_f$ e $y \neq 0$:

$$|f(x,y)| \leq |x| \frac{|y|}{\ln(1+|y|)} = |x| \left| \frac{|y|}{\ln(1+|y|)} \right|$$

Dei due fattori all'ultimo membro di questa disuguaglianza, il primo tende evidentemente a 0 (per $x \to 0$), mentre il secondo tende ad 1 (per $y \to 0$) ricordando un ben noto limite notevole. Si conclude che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, quindi f è prolungabile per continuità in $(0,0)$ definendola ivi uguale a 0. Per comodità (anche se in modo un po' impreciso) continueremo ad indicare con f la funzione così prolungata.

Passiamo ora a studiare la funzione in un intorno (bucato) del punto $(\pi, 0)$. Nei punti dell'asse x (cioè per $y = 0$) vicini a tale punto, la funzione è nulla, quindi di nuovo il limite $\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} f(x,y)$ se esiste vale 0. Ma questa volta possiamo osservare la funzione anche sulla retta $x = \pi$: si ha in questo caso

$$f(\pi, y) = \frac{\pi y}{\ln(1+|y|)}$$

(valida ovviamente se $y \neq 0$). Ne segue

$$\lim_{y\to 0^+} f(\pi, y) = \pi$$

e quindi il limite $\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} f(x,y)$ non esiste e la funzione non è prolungabile per continuità in $(\pi, 0)$.

c) In base alle risposte precedenti dobbiamo evidentemente considerare solo il punto $(0,0)$. La prima domanda da porsi in questo caso è se esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$ (in caso contrario per noti teoremi la funzione non sarebbe differenziabile nel punto). Si osserva a tale proposito che f è nulla sugli assi cartesiani in un intorno di $(0,0)$, quindi le derivate parziali di f nell'origine sono nulle. Allora, in base alla definizione di funzione differenziabile, e tenendo conto che $f(0,0) = 0$ per definizione, dobbiamo studiare il limite

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{[|e^{\sin x}-1| + \ln(1+|y|)]\sqrt{x^2+y^2}}$$

Come in precedenza, anche in questo caso la funzione di cui vogliamo studiare il limite è nulla sugli assi in un intorno dell'origine, quindi di nuovo tale limite se esiste vale 0. Ma questa volta osserviamo che cosa succede della restrizione della funzione ad esempio alla retta $y = x$: si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,x)/\sqrt{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{[|e^{\sin x}-1| + \ln(1+|x|)]\sqrt{2x^2}}$$

Applicando la teoria degli ordini di infinitesimo, si vede facilmente che nell'ultimo limite sia il numeratore sia il denominatore sono infinitesimi (per $x \to 0$) di ordine 2, e ciò implica che il limite dato esiste reale e diverso da 0. (Volendo, con facili calcoli, usando i limiti notevoli o il teorema di De L'Hospital, si otterrebbe che l'ultimo limite vale $\sqrt{2}/4$). Si conclude che il limite $(*)$ non esiste e la funzione data (prolungata per continuità in $(0,0)$) non è differenziabile in tale punto.