Data la funzione

$$f(x) := |x+1|e^x$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di continuità;

c) determinarne l'insieme di derivabilità;

d) determinare gli intervalli dove è crescente o decrescente;

e) determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e / o assoluto;

f) posto $g_k(x) := f(x) - k$, determinare il numero degli zeri di g_k al variare del parametro reale k.

Svolgimento. a) Le funzioni in gioco (un polinomio, la funzione esponenziale $x \to e^x$, il modulo) sono tutte definite in $\mathbb{R}$, quindi anche la funzione data f è definita in $\mathbb{R}$.
b) Le funzioni in gioco di cui al punto precedente sono tutte continue in $\mathbb{R}$, quindi anche f, ottenuta come prodotto o composta di tali funzioni, è continua in $\mathbb{R}$.
c) Le funzioni in gioco non sono tutte derivabili in $\mathbb{R}$, in quanto lo sono il polinomio e l'esponenziale, mentre la funzione $x \to |x|$ sappiamo che non è derivabile nel punto $x = 0$. Pertanto la funzione data è certamente derivabile nei punti x diversi da -1, ma potrebbe non essere derivabile dove il modulo si annulla, cioè nel punto -1. Verifichiamo:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{he^{-1+h}}{h} = e^{-1}$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-he^{-1+h}}{h} = -e^{-1}$$

I limiti destro e sinistro del rapporto incrementale della funzione, nel punto -1, sono diversi, quindi la funzione non è derivabile nel punto -1. (Si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato osservando che sono diversi i limiti destro e sinistro della derivata della funzione nel punto -1, per un noto teorema).
d) In base alla definizione di modulo, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} (-x-1)e^x & \text{se } x \leq -1 \\ (x+1)e^x & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

da cui

$$f'(x) = \begin{cases} (-x-2)e^x & \text{se } x < -1 \\ (x+2)e^x & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

(Si è già osservato che la funzione non è derivabile nel punto -1). Allora per noti teoremi la funzione è (strettamente) crescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[-1, +\infty)$, mentre è (strettamente) decrescente nell'intervallo $[-2, -1]$.
e) Si verifica facilmente che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi la funzione non può avere punti di massimo assoluto. Inoltre f è banalmente non negativa in $\mathbb{R}$, mentre si annulla solo per $x = -1$; ciò significa che il punto -1 è, per f, (l'unico) punto di minimo assoluto. Infine, poiché in un intorno sinistro di -2 la funzione è crescente e in un intorno destro di -2 è decrescente, il punto -2 è per f un punto di massimo relativo.
f) Indichiamo con $N(k)$ il numero richiesto degli zeri della funzione g_k. Si è già osservato che è $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi se $k < 0$ si ha $N(k) = 0$. Si è pure osservato che la funzione f si annulla solo per $x = -1$, quindi si ha anche $N(0) = 1$.

Per proseguire lo studio, conviene calcolare il valore della f nel punto di massimo relativo -2: si ha $f(-2) = 1/e^2$, e si ha pure $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Tenendo anche conto del noto teorema sui valori intermedi delle funzioni continue, si ottiene che:

★ se $0 < k < 1/e^2$, si ha $N(k) = 3$ (infatti la f assume il valore k una volta nell'intervallo $(-\infty, -2)$, una volta nell'intervallo $(-2, -1)$ e una volta nell'intervallo $(-1, +\infty)$);

★ se $k = 1/e^2$, si ha $N(1/e^2) = 2$ (infatti la f assume il valore $1/e^2$ nel punto -2 e poi una volta nell'intervallo $(-1, +\infty)$);

★ se $k > 1/e^2$ si ha $N(k) = 1$ (infatti in questo caso f assume il valore k solo una volta nell'intervallo $(-1, +\infty)$, mentre nell'intervallo $(-\infty, -1)$ non supera mai il valore $1/e^2$).