Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} (x+1)\big(\frac{\pi}{2} + \arctan(1/x)\big) & \textit{se } x < 0 \\ a & \textit{se } x = 0 \\ b(1 - \cos x + \sin x) & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

1) determinare, se possibile, i parametri reali a, b in modo che f sia continua nel suo insieme di definizione;
2) determinare, se possibile, i parametri reali a, b in modo che f sia derivabile nel suo insieme di definizione;
3) stabilire se per qualche valore dei parametri reali a, b la funzione è di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento. 1) La funzione data è chiaramente continua nell'intervallo $(-\infty, 0)$, dove anzi è di classe C^∞ (somme, prodotti, composte di funzioni continue sono continue). Lo stesso discorso vale nell'intervallo $(0, +\infty)$. Resta dunque da stabilire se la funzione data è continua in 0. Poiché per definizione è $f(0) = a$, la funzione f è continua in 0 se e solo se risulta

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a$$

Cominciamo a stabilire se il limite esiste; per noti teoremi dobbiamo vedere se i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali. Tenendo conto dell'espressione della funzione si ha, con facili calcoli,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1)\Big(\frac{\pi}{2} + \arctan(1/x)\Big) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b(1 - \cos x + \sin x) = 0$$

Poiché i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali, esiste il limite della funzione (per $x \to 0$) e vale 0. Si conclude che la funzione f è continua in 0 se e solo se $a = 0$. In tutto questo come si vede non compare affatto il parametro b, quindi il risultato è vero qualunque sia $b \in \mathbb{R}$.

2) Per la derivabilità si fa un ragionamento in buona parte analogo al precedente. La funzione è derivabile (anzi, di classe C^∞) sia nell'intervallo aperto $(-\infty, 0)$ sia nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$, come somma, prodotto, composta di funzioni derivabili; resta da studiare l'eventuale derivabilità nel punto 0.

Anche in questo caso dobbiamo calcolare un limite, per la precisione il limite del rapporto incrementale (si ricordi la definizione di derivata). Teniamo presente che se una funzione è derivabile in un punto, essa è anche continua in quel punto. Pertanto, se vogliamo trovare i valori dei parametri a, b per i quali la funzione è derivabile in 0. dobbiamo porre $a = 0$, perché in caso contrario la funzione non sarebbe continua in 0 e quindi nemmeno ivi derivabile.

Come in precedenza, essendo l'espressione della funzione diversa nei due casi $x < 0$ e $x > 0$, dobbiamo considerare separatamente i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)\big(\frac{\pi}{2} + \arctan(1/x)\big)}{x} = -1$$

Per calcolare questo limite si può ricorrere al teorema di de l'Hospital oppure (più elegantemente) si può ricordare l'uguaglianza

$$\arctan x + \arctan(1/x) = -\pi/2 \quad \forall x < 0$$

Si ha poi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{b(1-\cos x+\sin x)}{x} = b$$
per il quale basta ricorrere a noti limiti notevoli. Dai calcoli precedenti si vede che i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono uguali se e solo se $b=-1$. Si può quindi concludere che f è derivabile in 0 (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $a=0, b=-1$, ed in tal caso risulta $f'(0)=-1$.

3) Si chiede se la funzione è di classe $C^1(\mathbb{R})$, cioè se la funzione ammette derivata continua in tutto $\mathbb{R}$. Si è già osservato che la funzione è banalmente di classe C^∞ (cioè infinitamente derivabile) separatamente nei due intervalli aperti $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$; resta quindi solo da capire se la derivata della funzione è continua in 0, cioè se
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = -1$$
(Naturalmente consideriamo solo il caso $a=0, b=-1$, perché altrimenti la funzione non sarebbe derivabile in 0). Ancora una volta dobbiamo considerare separatamente i limiti sinistro e destro. Si ha
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(1/x) - \frac{x+1}{x^2+1}\right) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} b(\sin x+\cos x) = -1$$
Allora i due limiti sono uguali tra loro, e sono pure uguali al valore della derivata nel punto 0; in altre parole f' è continua anche in 0. Si conclude che se $a=0, b=-1$ la funzione è di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Si poteva procedere in modo diverso per rispondere alla domanda 2), rispondendo prima alla domanda 3). Infatti, per noti teoremi, se una funzione è continua in un punto x_o, derivabile a destra e a sinistra di x_o, ed è tale che esista finito il limite $\lim_{x\to x_o} f'(x)$, allora f è derivabile anche in x_o e la derivata è ivi uguale a tale limite. Alla luce di ciò, una volta verificato nella domanda 3) che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$, si poteva concludere che f è derivabile anche in 0 e che $f'(0)=-1$, senza bisogno di calcolare il limite del rapporto incrementale (come si è fatto nella risposta alla domanda 2)).