Al variare del parametro reale α siano date le funzioni f_α definite da

$$f_\alpha(x) = x - \alpha + xe^{\alpha x^2}$$

Rispondere a tutte le domande al variare del parametro α:
a) determinare l'insieme di definizione di f_α;
b) determinare gli eventuali limiti agli estremi di esso;
c) determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo e assoluto;
d) determinare l'eventuale esistenza, numero e segno degli zeri di f_α.

Svolgimento. a) La funzione data è formata con operazioni di somma, prodotto e composizione di polinomi ed esponenziale: tali funzioni sono tutte definite in $\mathbb{R}$ e quindi anche f_α è definita in $\mathbb{R}$, o, ciò che è lo stesso, in $(-\infty, +\infty)$. Ciò vale per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) La funzione data può anche essere scritta

$$f_\alpha(x) = -\alpha + x(e^{\alpha x^2} + 1)$$

La funzione esponenziale presente nella parentesi tonda ha limiti uguali a 0, a 1, o a $+\infty$ (per $x \to +\infty$ o $-\infty$) a seconda che sia $\alpha < 0,\ \alpha = 0,\ \alpha > 0$. Il fattore x invece ha per limite $+\infty$ per $x \to +\infty$, e $-\infty$ per $x \to -\infty$. Da questi fatti e da noti teoremi sui limiti si deduce immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = -\infty$$

Anche questo risultato vale per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Come è noto, la crescenza e la decrescenza di una funzione derivabile in un intervallo sono in relazione con il segno della derivata della funzione stessa. Le funzioni che entrano nella definizione di f_α sono tutte di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e quindi anche $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni valore reale di α; occorre quindi studiare il segno della derivata di f_α. Si ha

$$f'_\alpha(x) = 1 + (1 + 2\alpha x^2)e^{\alpha x^2}$$

Di qui si vede immediatamente che tale derivata è positiva in $\mathbb{R}$ se $\alpha \geq 0$, mentre non è chiaro che segno abbia se $\alpha < 0$. Supponiamo pertanto, d'ora in avanti, $\alpha < 0$.

Possiamo, in tale caso, fare intanto qualche osservazione. La funzione f'_α è pari, quindi possiamo in un primo momento studiare il suo segno solo per $x \geq 0$, da cui potremo poi dedurre facilmente il segno anche per le $x < 0$. Osserviamo anche che $f'_\alpha(0) = 2 > 0$, quindi per il teorema della permanenza del segno tale derivata sarà positiva anche in un intorno di 0. Osserviamo anche che $\lim_{x\to+\infty} f'_\alpha(x) = 1$; si pone quindi il problema di capire se $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ o se tale derivata si annulla o cambia segno in qualche punto di tale intervallo.

Consideriamo a tale scopo

$$f''_\alpha(x) = 2\alpha x(3 + 2\alpha x^2)e^{\alpha x^2}$$

Di qui segue che $f''_\alpha(x) < 0$ se $x \in [0, \sqrt{-3/(2\alpha)})$, mentre $f''_\alpha(x) > 0$ se $x \in (\sqrt{-3/(2\alpha)}, +\infty)$. Allora per noti teoremi f'_α è (strettamente) decrescente in $[0, \sqrt{-3/(2\alpha)})$ mentre è (strettamente) crescente in $(\sqrt{-3/(2\alpha)}, +\infty)$. Il punto $\sqrt{-3/(2\alpha)}$ è quindi un punto di minimo relativo (anzi, assoluto) per f'_α in $[0, +\infty)$; se calcoliamo il valore di f'_α in tale punto abbiamo un'informazione sul segno di f'_α in tale intervallo. Un facile calcolo mostra che si ha

$$f'_\alpha(\sqrt{-3/(2\alpha)}) = 1 - 2/\sqrt{e^3}$$

Come è noto, risulta $e > 2$, da cui seguono tutte le seguenti disuguaglianze:

$$e^3 > 8, \quad \sqrt{e^3} > 2\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{e^3} < 1/(2\sqrt{2}), \quad 1 - 2/\sqrt{e^3} > 1 - 1/\sqrt{2} > 0$$

Ciò prova che $f'_\alpha(\sqrt{-3/(2\alpha)}) > 0$, da cui segue che la derivata f'_α è positiva in tutto l'intervallo $[0, +\infty)$. Si è anche osservato che la f'_α è una funzione pari (cioè $f'_\alpha(x) = f'_\alpha(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), quindi in realtà è $f'_\alpha(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Per noti teoremi si conclude che la funzione f_α è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi per nessun valore reale di α esistono punti di massimo o minimo relativo o assoluto per f_α.

d) Si è già osservato che la funzione f_α è definita e continua in $\mathbb{R}$ per ogni valore reale di α, e che inoltre i limiti di f_α per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ hanno segno discorde. Per noti teoremi possiamo intanto affermare che f_α ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$ per ogni valore reale di α. Al punto precedente si è provato che f_α è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, quindi tale zero è unico. Anche questo è vero per ogni valore reale di α.
Resta infine da valutare il segno di tale zero, che possiamo indicare con x_α: esso è dunque l'unico punto reale tale che $f_\alpha(x_\alpha) = 0$. Da questa uguaglianza segue subito

$$\alpha = x_\alpha(1 + e^{\alpha x_\alpha^2})$$

In questa uguaglianza, il contenuto della parentesi tonda è sempre positivo, da cui segue che il segno di x_α è lo stesso del segno di α. Si conclude che x_α è positivo se α è positivo, x_α è negativo se α è negativo, x_α è zero se α è zero. $\square$