Osservazione sul teorema della media integrale.

È ben noto il seguente teorema, detto "della media integrale".

Teorema. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$. *Allora esiste almeno un punto* $c \in [a, b]$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{1}$$

Forse non tutti sanno che si può dare una formulazione leggermente più precisa di questo risultato nel modo seguente:

Corollario. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$. *Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

In altre parole si può provare che esiste un punto c *interno* all'intervallo (a, b) per il quale è verificata la tesi.

Per dimostrarlo, prendiamo le mosse dal teorema della media, e supponiamo in un primo momento che il punto c di cui si parla nella tesi coincida con un estremo dell'intervallo, ad esempio il punto a, quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) \tag{2}$$

Consideriamo ora separatamente alcuni casi che si possono verificare.

Primo caso: *Supponiamo* f *costante in* $[a, b]$.

In questo caso (banale) si può prendere come punto c qualunque punto di (a, b) quindi, essendo $f(a) = f(c)$, dalla (2) segue subito la (1).

Secondo caso: *Supponiamo sia* $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in [a, b]$ *ed esista almeno un punto* $x_1 \in (a, b]$ *tale che* $f(x_1) > f(a)$.

In questo caso possiamo applicare il teorema della permanenza del segno: esistono due numeri positivi δ, k tali che sia $f(x) - f(a) \geq k$ per ogni $x \in [x_1 - \delta, x_1]$. Ne segue allora

$$\int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) = \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx \geq \int_{x_1-\delta}^{x_1} [f(x) - f(a)]\,dx \geq \delta k > 0$$

assurdo perché in contrasto con la (2). Questo caso pertanto non si può verificare.

Terzo caso: *Supponiamo sia* $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in [a, b]$ *ed esista almeno un punto* $x_2 \in (a, b]$ *tale che* $f(x_2) < f(a)$.

Questo caso è analogo al precedente e non si può verificare.

Quarto caso: *Supponiamo che esistano almeno due punti* $x_1, x_2 \in (a, b]$ *tali che* $f(x_1) > f(a)$, $f(x_2) < f(a)$. In questo caso si può applicare il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_1, x_2]$ e si ottiene l'esistenza di un punto opportuno c, compreso tra x_1 e x_2, tale che $f(c) = f(a)$ e dalla (2) si ha la tesi.

Non esistono altri casi da considerare e il corollario è quindi completamente dimostrato. $\square$