ESERCIZIO SUI LIMITI (VERIFICA CON LA DEFINIZIONE)

Sia f la funzione di una variabile reale, a valori in $\mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{x - 2x^3}{3x^3 + 1}\,.$$

Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^+} f(x) = -\infty\,.$$

Svolgimento dell'esercizio

Osserviamo preliminarmente che

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ 3x^3 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \big\{-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\big\} = \big(-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\big) \cup \big(-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}, +\infty\big).$$

1. **Il limite di f in $+\infty$.**

Poiché $Dom(f)$ non è superiormente limitato - ovvero $+\infty$ è punto di accumulazione per $Dom(f)$, ha senso considerare il limite di f in $+\infty$. Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$.
Sia $\varepsilon > 0$. Proviamo che $\exists\ \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.c., $\forall\ x \in Dom(f)$ t.c. $x > \delta_\varepsilon$, si abbia che $\big|f(x) - \big(-\frac{2}{3}\big)\big| < \varepsilon$.
Osserviamo che, $\forall\ x \in Dom(f)$,

$$\big|f(x) - \big(-\tfrac{2}{3}\big)\big| = \left|\frac{x - 2x^3}{3x^3 + 1} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3x - 6x^3 + 6x^3 + 2}{3(3x^3 + 1)}\right| = \left|\frac{3x + 2}{3(3x^3 + 1)}\right|.$$

Ora cerchiamo di <u>maggiorare</u> $\big|f(x)-\big(-\frac{2}{3}\big)\big|$, e cioè di trovare una disuguaglianza del tipo $\big|f(x)-\big(-\frac{2}{3}\big)\big| \leq g(x)$ per un'opportuna funzione g; poiché dobbiamo far tendere x a $+\infty$, non sarà necessario che la disuguaglianza valga in tutto il dominio di f; l'importante è che valga in un <u>intorno</u> di $+\infty$. Inoltre, affinché una tale disuguaglianza sia utile, la disequazione $g(x) < \varepsilon$ dovrà essere più facile da studiare rispetto alla disequazione $\big|f(x) - \big(-\frac{2}{3}\big)\big| < \varepsilon$, e l'insieme delle sue soluzioni dovrà contenere un intorno di $+\infty$.
Osserviamo che, $\forall\ x \in (0, +\infty)$ (intorno di $+\infty$), si ha che

$$\big|f(x) - \big(-\tfrac{2}{3}\big)\big| = \left|\frac{3x + 2}{3(3x^3 + 1)}\right| = \frac{3x + 2}{3(3x^3 + 1)} \leq \frac{3x + 2}{9x^3} \tag{1.1}$$

(perché $3x^3 + 1 \geq 3x^3 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{3x^3+1} \leq \frac{1}{3x^3}$ e quindi, essendo $3x + 2 > 0$, $\frac{3x+2}{3x^3+1} \leq \frac{3x+2}{3x^3}$).
Se inoltre $x \in [1, +\infty)$, si ha anche che $3x + 2 \leq 3x + 2x = 5x$; essendo $9x^3 > 0$, da (1.1) si ottiene allora che

$$\big|f(x) - \big(-\tfrac{2}{3}\big)\big| \leq \frac{5x}{9x^3} = \frac{5}{9x^2} \qquad \forall\ x \in [1, +\infty). \tag{1.2}$$

Osserviamo che

$$\frac{5}{9x^2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \tfrac{5}{9\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| > \tfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{\varepsilon}}\,.$$

In particolare, quindi, si ha che

$$\frac{5}{9x^2} < \varepsilon \qquad \forall\ x \in \Big(\tfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\Big) \tag{1.3}$$

Poniamo ora $\delta_\varepsilon = \max\Big\{1, \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{\varepsilon}}\Big\}$. Allora, $\forall\ x \in Dom(f)$ t.c. $x > \delta_\varepsilon$ (e cioè $\forall\ x \in \mathbb{R}$ t.c. $x > \delta_\varepsilon$, dato che $\delta_\varepsilon > -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$), si ha che $x > 1$ e $x > \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{\varepsilon}}$ e quindi, per (1.2) e (1.3),

$$\big|f(x) - \big(-\tfrac{2}{3}\big)\big| \leq \frac{5}{9x^2} < \varepsilon\,.$$

Pertanto,

$$\left|f(x)-\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right|<\varepsilon \qquad \forall\, x\in\mathbb{R} \text{ t.c } x>\delta_\varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi verificato che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{2}{3}$.

2. **Il limite di f in $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^{+}$.**

Poiché $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ è punto di accumulazione per $Dom(f)\cap\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},+\infty\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$, ha senso considerare il limite di f in $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^{+}$. Verifichiamo che $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^{+}} f(x)=-\infty$.

Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}$. Proviamo che $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ t.c., $\forall\, x\in Dom(f)$ t.c. $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\delta_\varepsilon$, si abbia che $f(x)<\varepsilon$.
Cerchiamo di maggiorare $f(x)$ in un intorno <u>destro</u> di $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
Osserviamo che, $\forall\, x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},0\right)$ (intorno destro di $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$), si ha che $|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e quindi $2x^2<\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$; di conseguenza, $1-2x^2>1-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$. Essendo $3x^3+1>0$ e $x<0$ (e quindi $\frac{x}{3x^3+1}<0$), ne segue che

$$f(x)=\frac{x-2x^3}{3x^3+1}=\frac{x(1-2x^2)}{3x^3+1}\le\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)}{3x^3+1}\qquad\forall\, x\in\left(-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}},0\right). \tag{2.1}$$

Se inoltre $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},-\frac{1}{2}\right]$ (intorno destro di $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, dato che $\sqrt[3]{3}<2\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{2}\Longrightarrow-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<-\frac{1}{2}$), essendo $x\le-\frac{1}{2}$ ed essendo $1-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$, $3x^3+1>0$ si ha che $\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)}{3x^3+1}\le\frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)}{3x^3+1}$; da (2.1) segue allora che

$$f(x)\le-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{3x^3+1}\qquad\forall\, x\in\left(-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}},-\tfrac{1}{2}\right]. \tag{2.2}$$

Poiché dobbiamo provare che $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^{+}} f(x)=-\infty$, <u>non è restrittivo supporre $\varepsilon<0$</u>. Osserviamo che allora $-\varepsilon>0$. Pertanto, dato $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$, essendo sia $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ che $3x^3+1$ maggiori di 0 si ha che

$$-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{3x^3+1}<\varepsilon \iff \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{3x^3+1}>-\varepsilon \iff \frac{3x^3+1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}<-\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff 3x^3+1<\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{1}{2}}{\varepsilon}=\frac{2-\sqrt[3]{9}}{2\varepsilon\sqrt[3]{9}} \iff x^3<-\frac{1}{3}+\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}} \iff x<\sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}}\,.$$

In particolare, quindi,

$$-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{3x^3+1}<\varepsilon\qquad\forall\, x\in\left(-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\sqrt[3]{-\tfrac{1}{3}+\tfrac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}}\right). \tag{2.3}$$

N.B.: $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}}>-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, dato che $\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}>0$ (essendo sia $2-\sqrt[3]{9}$ che ε negativi).
Poniamo ora $\delta_\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}}\right\}$. Allora $\delta_\varepsilon>0$; inoltre, $\forall\, x\in Dom(f)$ t.c. $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\delta_\varepsilon$ (e cioè $\forall\, x\in\mathbb{R}$ t.c. $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\delta_\varepsilon$), si ha che $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<\sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{2-\sqrt[3]{9}}{6\varepsilon\sqrt[3]{9}}}$ e quindi, per (2.2) e (2.3),

$$f(x)\le-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{3x^3+1}<\varepsilon\,.$$

Pertanto,

$$f(x)<\varepsilon\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}\text{ t.c. } -\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<-\tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\delta_\varepsilon.$$

Abbiamo quindi verificato che $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}^{+}} f(x)=-\infty$.