Bollettino U. M. I.
(5) **18**-A (1981), 449-456

Generalizzazioni del principio di massimo e maggiorazione delle soluzioni per operatori ellittici di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Sunto. – *I prove that an inequality for subsolutions of a linear second order elliptic equation in divergence form is valid if and only if such an equation satisfies a generalized maximum principle.*

1. – Introduzione.

Si consideri un operatore lineare ellittico del secondo ordine in forma variazionale e a coefficienti discontinui, del tipo

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} + d_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\,. \tag{1}$$

In precedenti lavori ([2], [3]) è stato caratterizzato il primo autovalore di tale operatore mettendolo anche in relazione con la validità di un principio di massimo generalizzato per le sottosoluzioni: « se $u \leqslant 0$ su $\partial\Omega$, $Lu \leqslant 0$ in Ω, allora $u \leqslant 0$ in Ω ». Tale proprietà è valida se e solo se il primo autovalore di L è negativo.

Scopo del presente lavoro è esprimere un'altra proprietà equivalente al suddetto principio di massimo generalizzato: « esiste una costante positiva K_1 tale che se $Lu \leqslant 0$ in Ω risulta $u \leqslant K_1 \max\left(0, \max_{\partial\Omega} u\right)$ ».

Viene poi dimostrato che una proprietà simile, espressa per le soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ in Ω, vale non appena lo zero non sia un autovalore dell'operatore L: « esiste una costante positiva K_2 tale che se $Lu = 0$ in Ω risulta $|u| \leqslant K_2 \max_{\partial\Omega} |u|$ in Ω » se e solo se « zero non è un autovalore di L ».

Vengono infine estesi tali risultati al caso di equazioni non omogenee del tipo $Lu = -\sum_{i=1}^{n} \partial f_i/\partial x_i$ in Ω.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova.

2. – Notazioni, ipotesi, risultati noti.

Sia Ω un insieme aperto limitato di R^n; per semplicità supponiamo $n \geqslant 3$. Sia $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$, $c \in L_{p/2}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $p > n$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geqslant |t|^2$ q.o. in Ω per ogni $t \in R^n$,

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx . \tag{2}$$

Siano $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ gli spazi di Hilbert ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)} .$$

Se $u \in H^1(\Omega)$ e k è una costante reale, si dirà che $u \leqslant k$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j \in N} \subset C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u_j \leqslant k$ su $\partial\Omega$ $(j = 1, 2, \ldots)$ e $\lim_j u_j = u$ nella topologia forte di $H^1(\Omega)$. Si pone poi

$$\max_{\partial\Omega} u = \inf \{k \colon u \leqslant k \text{ su } \partial\Omega \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\} .$$

(Nel presente lavoro si intenderà sempre in questo senso il massimo su $\partial\Omega$ di una funzione di $H^1(\Omega)$).

Si dice che il numero reale λ è un autovalore per l'operatore L (definito in (1)) se il problema al contorno

$$\begin{cases} a(u, v) + \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 , & \forall v \in C_0^1(\Omega) , \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ammette soluzioni u diverse da quella banale nulla.

PROPOSIZIONE 1. – *Le seguenti condizioni sono tutte tra loro equivalenti:*

(*a*) *gli autovalori reali dell'operatore* L *sono tutti negativi;*

(*b*) *posto* $\psi(w) = \inf \{a(w, v)/(w, v)_{L_2(\Omega)} \colon v \in H_0^1(\Omega), v > 0$ *in* $\Omega\}$,

$$\lambda_1 = -\sup \{\psi(w) \colon w \in H^1(\Omega),\ w > 0 \ \textit{in}\ \Omega\} ,$$

risulta $\lambda_1 < 0$;

(*c*) *se* $u \in H^1(\Omega)$, $u \leqslant 0$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *in* Ω, *allora risulta* $u \leqslant 0$ *q.o. in* Ω;

(*d*) *esiste (almeno) una funzione* $w \in H^1(\Omega)$ *tale che*: $w \geqslant 0$ *q.o. in* Ω, $a(w, v) \geqslant 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *in* Ω, $a(w, v) \neq 0$ *per qualche* $v \in C_0^1(\Omega)$;

(*e*) *esiste (almeno) una funzione* $w \in H^1(\Omega)$ *tale che*: $w \geqslant 0$ *q.o. in* Ω, $w \geqslant 1$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^1(\Omega)$, $a(w, v) \geqslant 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Si veda [2], [3]. ∎

3. – Maggiorazione delle sottosoluzioni.

TEOREMA 2. – *Ciascuna delle condizioni* (*a*), (*b*), ..., (*e*) *elencate nella proposizione precedente è equivalente alla*

(*f*) *esiste una costante positiva* K_3 *tale che, se* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *in* Ω, *risulta*

$$u \leqslant K_3 \max\left(0, \max_{\partial\Omega} u\right) \qquad \text{q.o. in } \Omega\,. \tag{4}$$

DIMOSTRAZIONE. – (*f*) ⇒ (*c*). Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che $a(u, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω. Se $u \leqslant 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$, allora $\max_{\partial\Omega} u \leqslant 0$ e quindi dalla (4) segue $u \leqslant 0$ q.o. in Ω.

(*c*) ⇒ (*f*). Si considera la soluzione w del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} a(w, v) = 0 & \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ w - 1 \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Tale soluzione w è unica per l'ipotesi fatta e quindi esiste in quanto per il problema (5) vale la teoria di Riesz-Fredholm (vedi [5]).

Detta u una funzione di $H^1(\Omega)$ tale che $a(u, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω, poniamo $k = \max_{\partial\Omega} u$; se $k \leqslant 0$ oppure se $k = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare, pertanto supponiamo $0 < k < +\infty$. Essendo $w \geqslant 1$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$, si verifica facilmente che $u - kw \leqslant 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$; inoltre è $a(u - kw, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω. Quindi per la supposta proprietà (*c*) si ha $u \leqslant kw$ q.o. in Ω, da cui $u \leqslant k \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} w$ q.o. in Ω. Pertanto la (4) è provata con $K_3 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} w$, essendo w la soluzione del problema (5). ($w \in L_\infty(\Omega)$ per i risultati di [5]). ∎

OSSERVAZIONE. – Se $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geqslant 0$ nel senso delle distribuzioni $\left(\text{cioè se } \int_{\Omega} \left(cv + \sum_{i=1}^{n} d_i v_{x_i}\right) dx \geqslant 0 \text{ per ogni } v \in C_0^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ in } \Omega\right)$ risulta $a(1, v) \geqslant 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω. Si può quindi assumere nella dimostrazione precedente $w \equiv 1$ in Ω, ottenendo così la (4) con $K_3 = 1$. Si ritrova in tal modo il ben noto «principio di massimo debole» (vedi [5], [1]). ■

4. – Maggiorazione delle soluzioni.

TEOREMA 3. – *Sono tra loro equivalenti i seguenti due fatti:*

(*g*) *esiste una costante positiva* K_4 *tale che se* $u \in H^1(\Omega)$ *e* $a(u, v) = 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, *risulta*

$$|u| \leqslant K_4 \max_{\partial\Omega} |u| \quad q.o. \text{ in } \Omega; \tag{6}$$

(*h*) *zero non è un autovalore dell'operatore* L.

DIMOSTRAZIONE. – (*g*) $\Rightarrow$ (*h*). Il problema al contorno

$$\begin{cases} a(u, v) = 0 & \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ammette evidentemente la sola soluzione nulla per la condizione (*g*). Quindi lo zero non è un autovalore dell'operatore L.

(*h*) $\Rightarrow$ (*g*). Per assurdo supponiamo che non valga la (6): allora esiste una successione $\{u_j\}_{j\in N}$ contenuta in $H^1(\Omega)$ tale che $a(u_j, v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\|u_j\|_{L_\infty(\Omega)} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots)\,, \tag{7}$$

$$\lim_{j} \max_{\partial\Omega} |u_j| = 0\,. \tag{8}$$

Facciamo ora vedere che esiste una successione estratta da $\{u_j\}_{j\in N}$ convergente (fortemente) in $L_2(\Omega)$ ad una funzione $u^\wedge$ tale che

$$\begin{cases} a(u^\wedge, v) = 0 & \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ u^\wedge \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Infatti, per ogni $j = 1, 2, \ldots$ poniamo $k_j = \max_{\partial\Omega} |u_j|$, $w_j = \max(u_j - k_j, 0) + \min(u_j + k_j, 0)$, $z_j = u_j - w_j$. Risulta allora, per note proprietà dello spazio $H^1(\Omega)$ (vedi ad esempio [4]), $w_j \in H_0^1(\Omega)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Inoltre, come facilmente si verifica, $|z_j| \leqslant k_j$ in Ω, e quindi

$$\lim_j \|z_j\|_{L_\infty(\Omega)} = 0 . \tag{10}$$

Di qui, tenuto conto della (7),

$$\sup_j \|w_j\|_{L_\infty(\Omega)} < +\infty . \tag{11}$$

Poichè $w_j \in H_0^1(\Omega)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ risulta $a(u_j, w_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ da cui

$$\int_\Omega (w_j)_x^2\, dx \leqslant \int_\Omega \sum_{i,r=1}^n a_{ir}(w_j)_{x_i}(w_j)_{x_r}\, dx = \tag{12}$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,r=1}^n a_{ir}(u_j)_{x_i}(w_j)_{x_r}\, dx \leqslant \left| \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n b_i(w_j)_{x_i} w_j + \sum_{i=1}^n d_i u_j (w_j)_{x_i} + c u_j w_j \right\} dx \right| .$$

Dalle (12), (11), (7) si deduce facilmente che

$$\sup_j \|w_j\|_{H^1(\Omega)} < +\infty . \tag{13}$$

Esiste pertanto una successione estratta da $\{w_j\}_{j\in N}$ (ed ancora denotata per semplicità allo stesso modo), che converge debolmente in $H_0^1(\Omega)$ ad una funzione $u^\wedge \in H_0^1(\Omega)$; per noti teoremi si può assumere che

$$\lim_j \|u^\wedge - w_j\|_{L_2(\Omega)} = 0 , \tag{14}$$

e per le (10), (14)

$$\lim_j \|u^\wedge - u_j\|_{L_2(\Omega)} = 0 . \tag{15}$$

Dimostriamo ora che la funzione $u^\wedge$ è soluzione del problema (9). Data una qualunque soluzione $u \in H^1(\Omega)$ dell'equazione $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, per [5] (lemma 5.2) risulta

$$\int_\Omega \alpha^2 u_x^2\, dx \leqslant K \int_\Omega u^2(\alpha^2 + \alpha_x^2)\, dx \qquad \text{per ogni } \alpha \in C_0^1(\Omega) , \tag{16}$$

essendo K una opportuna costante (indipendente da u e da α).

Dato un qualunque sottoinsieme aperto A di Ω tale che $\bar{A} \subset \Omega$, sia $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ una funzione uguale ad 1 in ogni punto di A. Applicando la (16) con tale α e con u_j al posto di u, tenendo conto della (7) si ottiene

$$\sup_j \|(u_j)_x\|_{L_2(A)} < +\infty . \tag{17}$$

Dalle (7), (17) otteniamo che un'opportuna estratta dalla successione $\{u_j\}_{j\in N}$, ancora denotata per semplicità allo stesso modo, converge debolmente in $H^1(A)$, e quindi fortemente in $L_2(A)$, ad una funzione che per la (15) coincide con $u^\wedge$.

Pertanto per ogni $v \in C_0^1(A)$ risulta

$$a(u^\wedge, v) = \lim_j a(u_j, v) = 0 . \tag{18}$$

Poichè A è un arbitrario aperto contenuto propriamente in Ω, ne segue che $u^\wedge$ è soluzione del problema (9); per l'ipotesi (h) è $u^\wedge \equiv 0$ in Ω.

Ricordiamo ora il teorema 4.1 (con l'osservazione 4.2) di [5]: esiste una costante K_5, indipendente da j, tale che

$$\|u_j\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \max_{\partial\Omega} |u_j| + K_5 \|u_j\|_{L_2(\Omega)} \qquad (j = 1, 2, \ldots) . \tag{19}$$

Passando al limite per $j \to +\infty$ nella (19) e ricordando le (7), (8), (15) si ottiene

$$1 \leqslant K_5 \|u^\wedge\|_{L_2(\Omega)}$$

assurdo perchè, come si è detto, $u^\wedge \equiv 0$ in Ω. ∎

Osservazione. – È interessante confrontare la (4) con la (6): mentre questa vale se e solo se lo zero non è autovalore di L, affinchè la (4) sia valida occorre e basta, di più, che tutti gli autovalori reali di L siano negativi. ∎

5. – L'equazione non omogenea.

Teorema 4. – *Ciascuna delle condizioni* (a), (b), ..., (f) *precedentemente considerate è equivalente alla*

(i) *esiste una costante positiva* K_6 *tale che, se* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i v_{x_i}\, dx$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *in* Ω, *essendo* $f_i \in$

$\in L_p(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *con* $p > n$, *risulta*

$$(20)\qquad u \leqslant K_6\Big[\max\big(0, \max_{\partial\Omega} u\big) + \sum_i \|f_i\|_{L_p(\Omega)}(\operatorname{mis}\Omega)^{1/n-1/p}\Big] \quad q.o.\ in\ \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. – $(i) \Rightarrow (f)$. Basta porre $f_i \equiv 0$ in Ω $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nella (i) per ottenere la (f).

$(f) \Rightarrow (i)$. Sia $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leqslant \sum_i \int_\Omega f_i v_{x_i}\, dx$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω, con $f_i \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > n$. Si consideri la soluzione w del problema al contorno

$$\begin{cases} a(w, v) = \sum_i \int_\Omega f_i v_{x_i}\, dx \qquad \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ w \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Tale soluzione w esiste ed è unica perchè lo zero non è autovalore dell'operatore L (condizione (a)). Per [5] (teorema 4.2 e osservazione 4.3 e 4.5) esiste una costante K_7 tale che

$$(21)\qquad |w| \leqslant K_7 \sum_j \|f_j\|_{L_p(\Omega)}(\operatorname{mis}\Omega)^{1/n-1/p} \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

D'altra parte si ha $a(u - w, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ in Ω, quindi per la condizione (f) esiste una costante K_3 tale che

$$(22)\qquad u - w \leqslant K_3 \max\Big[0, \max_{\partial\Omega}(u - w)\Big] \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Tenendo conto che $w \in H_0^1(\Omega)$, ne segue $\max_{\partial\Omega} u = \max_{\partial\Omega}(u - w)$, pertanto dalle (21), (22) si ottiene facilmente la (20). ∎

TEOREMA 5. – *Ciascuna delle condizioni* (g), (h) *precedentemente considerate equivale alla*

(j) *esiste una costante positiva* K_8 *tale che se* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) = \sum_{i=1}^{} \int_n f_i v_{x_i}\, dx$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, *con* $f_i \in L_p(\Omega)$, $p > n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *allora risulta*

$$|u| \leqslant K_8\Big[\max_{\partial\Omega}|u| + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_p(\Omega)}(\operatorname{mis}\Omega)^{1/n-1/p}\Big] \qquad q.o.\ in\ \Omega\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – È simile a quella del teorema precedente e si lascia al lettore. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **3** (1970), 384-394.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **87** (1970), 1-10.

[3] M. CHICCO, *Some properties of the first eigenvalue and the first eigenfunction of linear second order elliptic partial differential equations in divergence form*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **5** (1972), 245-254.

[4] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17** (1963), 43-77.

[5] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189-285.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 4 settembre 1980