Bollettino U. M. I.
(5) **15**-A (1978), 571-580

# Condizioni sufficienti per la hölderianità alla frontiera delle soluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

**Summary.** – *Three conditions, two of which were formerly used by different authors to prove boundary hölderness of solutions of divergence form linear elliptic equations, are proved to be equivalent.*

## 1. – Introduzione.

Il problema della regolarità fino alla frontiera delle soluzioni delle equazioni ellittiche lineari del secondo ordine di tipo variazionale è stato oggetto di studio da parte di vari autori (vedi ad esempio [1], [4], [5], [6], [7], [8]).

Scopo della presente nota è confrontare tre condizioni, ciascuna delle quali è sufficiente per la hölderianità alla frontiera delle soluzioni, dimostrandone l'equivalenza. Una di queste condizioni è stata utilizzata da Gariepy e Ziemer [4] (in una forma più generale) per provare la continuità alla frontiera delle soluzioni di equazioni ellittiche quasilineari. Un'altra condizione è stata introdotta da Stampacchia ([7], [8]) che ha dimostrato la sua sufficienza (non solo per la continuità ma anche) per la hölderianità delle soluzioni alla frontiera.

Ringrazio la dottoressa Ada Aruffo che, avendo letto una versione preliminare del manoscritto, ha fatto preziose osservazioni.

## 2. – Notazioni ed ipotesi.

Le seguenti ipotesi verranno sottointese nel seguito.

Sia $\Omega$ un insieme aperto e limitato di $R^n$; per semplicità supponiamo $n \geqslant 3$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Laboratorio di Matematica Applica » del C.N.R. presso l'Università di Genova.

Siano $H^{1,p}(\Omega)$ ed $H_0^{1,p}(\Omega)$ gli spazi di Banach (sui reali) ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega)}$$

Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_t(\Omega)$, $c \in L_{t/2}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $t > n$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geqslant \nu|\lambda|^2$ q.o. in $\Omega$ e per ogni $\lambda \in R^n$, con $\nu$ costante positiva,

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx .$$

Sia $B$ un sottoinsieme compatto di $\bar{\Omega}$ e $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Si dice che $u \leqslant k$ in $B$ nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$ se esiste una successione di funzioni $\varphi_j \in C^1(\bar{\Omega})$ $(j = 1, 2, \ldots)$ tali che $\varphi_j \leqslant k$ in $B$ $(j = 1, 2, \ldots)$ e

$$\lim_{j \to +\infty} \|u - \varphi_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0 .$$

Sia $\omega_n$ l'area della superficie della sfera unitaria in $R^n$, e $d_\Omega$ il diametro di $\Omega$.

## 3. - Capacità.

Sia $B$ un sottoinsieme compatto di $R^n$ e $1 < p < n$.

DEFINIZIONE 1. - *Chiamiamo capacità (di ordine $p$) di $B$ la quantità*

$$\operatorname{cap}(p) B = \inf \{ \|v_x\|^p_{L_p(R^n)} : v \in C_0^1(R^n),\ v \geqslant 1 \text{ in } B \} .$$

DEFINIZIONE 2. - *Chiamiamo capacità (di ordine $p$) di $B$ rispetto ad $\Omega$ la quantità*

$$\operatorname{cap}(p, \Omega) B = \inf \{ (d_\Omega)^{-p} \|v\|^p_{L_p(\Omega)} + \|v_x\|^p_{L_p(\Omega)} : v \in C^1(\bar{\Omega}),\ v \geqslant 1 \text{ in } B \cap \bar{\Omega} \} .$$

Le definizioni precedenti differiscono da quelle date in [2], [3] per il fattore $(d_\Omega)^{-p}$, introdotto per ragioni dimensionali (ciò permetterà di semplificare alcune formule nel seguito).

Sia $S(x_0, \varrho)$ la sfera aperta di centro $x_0$ e raggio $\varrho$:

$$S(x_0, \varrho) = \{ x \in R^n : |x - x_0| < \varrho \} .$$

Per ogni $D$ sottoinsieme di $R^n$ e $\varrho > 0$ poniamo

$$D(\varrho) = \{x \in R^n \colon x/\varrho \in D\} .$$

Siano $B$ ed $\Omega$ come in precedenza. Sussiste allora il

LEMMA 1. – *Risulta*

$$\operatorname{cap}\big(p, \Omega(\varrho)\big) B(\varrho) = \varrho^{n-p} \operatorname{cap}(p, \Omega) B$$

$$\operatorname{cap}(p) B(\varrho) = \varrho^{n-p} \operatorname{cap}(p) B .$$

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

LEMMA 2. – *Sia $\Omega$ dotato della proprietà di cono. Allora esistono due costanti positive $K_1$ e $K_2$ (dipendenti da $p$, $n$, $\Omega$) tali che per ogni $\varrho > 0$ e per ogni compatto $B$ contenuto in $\overline{\Omega(\varrho)}$ risulti*

$$K_1 \operatorname{cap}(p) B \leqslant \operatorname{cap}\big(p, \Omega(\varrho)\big) B \leqslant K_2 \operatorname{cap}(p) B .$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $E$ un sottoinsieme compatto di $\overline{\Omega}$. Dal Lemma 1 di [2] segue l'esistenza di due costanti positive $K_1$ e $K_2$, dipendenti da $p$, $n$, $\Omega$ e indipendenti da $E$, tali che

$$K_1 \operatorname{cap}(p) E \leqslant \operatorname{cap}(p, \Omega) E \leqslant K_2 \operatorname{cap}(p) E .$$

Tenendo conto del lemma 1 ne segue, per ogni $\varrho > 0$:

$$K_1 \operatorname{cap}(p) E(\varrho) \leqslant \operatorname{cap}\big(p, \Omega(\varrho)\big) E(\varrho) \leqslant K_2 \operatorname{cap}(p) E(\varrho) . \tag{2}$$

Dato ora l'insieme $B$ contenuto in $\overline{\Omega(\varrho)}$, risulta evidentemente $B(1/\varrho) \subset \overline{\Omega}$. Pertanto è lecito sostituire $B(1/\varrho)$ ad $E$ nella (2):

$$K_1 \operatorname{cap}(p)[B(1/\varrho)](\varrho) \leqslant \operatorname{cap}\big(p, \Omega(\varrho)\big)[B(1/\varrho)](\varrho) \leqslant K_2 \operatorname{cap}(p)[B(1/\varrho)](\varrho) .$$

Poichè $[B(1/\varrho)](\varrho) = B$, si ha la tesi.

## 4. – Risultato principale.

Sia $x_0 \in R^n$ e $\varrho > 0$; poniamo

$$\Omega(x_0, \varrho) = \Omega \cap S(x_0, \varrho) ; \quad \Gamma(x_0, \varrho) = \overline{\partial\Omega \cap S(x_0, \varrho)}.$$

Le condizioni (*b*), (*c*) del teorema che segue sono state utilizzate rispettivamente da [7], [8] e da [4] per provare la regolarità alla frontiera delle soluzioni delle equazioni ellittiche del secondo ordine in forma variazionale. (La condizione del teorema 2 di [4] è in realtà più generale della (*c*), perchè impone soltanto

$$\min \lim_{\varrho\to 0^+} \operatorname{cap}(p)\,[\overline{S(x_0,\varrho)}\setminus\Omega(x_0,\varrho)]^{-1}\varrho^{n-p} < +\infty\,.$$

D'altronde in [4] si prova la continuità della soluzione nel punto $x_0$ e non la sua hölderianità).

TEOREMA 1. – *Sia $x_0 \in \partial\Omega$ e $1 < p < n$. Le seguenti tre condizioni sono equivalenti:*

(*a*) *esistono un numero positivo $\varrho_0$ ed una costante positiva $K_3$ dipendente da $n, p, \Omega$ tali che per ogni $\varrho$ con $0 < \varrho < \varrho_0$ risulti*

$$[\operatorname{mis}\Omega(x_0,\varrho)]^{1/p^*} \leqslant K_3[\operatorname{cap}(p)\,\Gamma(x_0,\varrho)]^{1/p} \tag{3}$$

*essendo $p^* = pn/(n-p)$;*

(*b*) *esistono un numero positivo $r_0$ ed una costante positiva $K_4$, dipendente da $n, p, \Omega$, tali che risulti*

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant K_4\|u_x\|_{L_p(\Omega(x_0,\varrho))} \tag{4}$$

*per ogni $\varrho$ con $0 < \varrho < r_0$ e per ogni $u \in H^1(\Omega(x_0,\varrho))$, $u = 0$ in $\Gamma(x_0,\varrho)$ nel senso di $H^{1,p}(\Omega(x_0,\varrho))$;*

(*c*) *esistono un numero positivo $r^*$ ed una costante positiva $K_5$ dipendente da $n, p, \Omega$ tali che per ogni $\varrho$ con $0 < \varrho < r^*$ risulti*

$$\varrho^{n-p} \leqslant K_5 \operatorname{cap}(p)\,[\overline{S(x_0,\varrho)}\setminus\Omega(x_0,\varrho)]\,. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. – (Per brevità scriveremo $S$ in luogo di $S(x_0,\varrho)$).

(*a*) $\Rightarrow$ (*c*). Risulta

$$\begin{aligned}\varrho^{n-p}[\operatorname{cap}(p)(\overline{S}\setminus\Omega)]^{-1} &= \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^{1-p/n}(\operatorname{mis} S)^{1-p/n}[\operatorname{cap}(p)(\overline{S}\setminus\Omega)]^{-1} \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^{1-p/n}[\operatorname{mis}(S\setminus\Omega)^{1-p/n} + \operatorname{mis}\Omega(x_0,\varrho)^{1-p/n}][\operatorname{cap}(p)(\overline{S}\setminus\Omega)]^{-1}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Dalla definizione 1 si deduce facilmente che per ogni compatto $B$ di $R^n$ risulta

$$\operatorname{mis} B \leqslant K_6^{p^*}[\operatorname{cap}(p)\,B]^{n/(n-p)} \tag{7}$$

essendo $K_6$ una costante dipendente solo da $p$ ed $n$.

Infatti, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, sia $\varphi$ una funzione tale che:

$$\varphi \in C_0^1(R^n), \qquad \varphi \geqslant 1 \text{ in } B,$$
$$\|\varphi_x\|_{L_p(R^n)} \leqslant \operatorname{cap}(p) B + \varepsilon .$$

Per noti teoremi di Sobolev risulta

$$\|\varphi\|_{L_{p^*}(R^n)} \leqslant K_6 \|\varphi_x\|_{L_p(R^n)} \tag{8}$$

da cui

$$\operatorname{mis} B \leqslant \|\varphi\|^{p^*}_{L_{p^*}(R^n)} \leqslant K_6^{p^*} \|\varphi_x\|^{p^*}_{L_p(R^n)} \leqslant K_6^{p^*} [\operatorname{cap}(p) B + \varepsilon]^{p^*/p},$$

e per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ si ha la (7). Inoltre è evidente che

$$\operatorname{cap}(p)\Gamma(x_0, \varrho) \leqslant \operatorname{cap}(p)(\bar{S} \setminus \Omega) .$$

Allora dalle (6), (7) si deduce

$$\varrho^{n-p}[\operatorname{cap}(p)(\bar{S}\setminus\Omega)]^{-1} \leqslant \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^{1-p/n} \{K_6^p + \\ + [\operatorname{mis} \Omega(x_0, \varrho)]^{1-p/n} [\operatorname{cap}(p)\Gamma(x_0, \varrho)]^{-1}\} .$$

Di qui e dalla (3) si ha la (5).

(c) $\Rightarrow$ (b). Sia $u \in C^1(\Omega(x_0, \varrho))$, $u = 0$ su $\Gamma(x_0, \varrho)$, $0 < \varrho < \varrho_0$.

Continuiamo ad indicare con $u$ la funzione prolungata in $\bar{S}\setminus\Omega$ ponendola ivi uguale a zero. Poichè per ipotesi $u = 0$ su $\Gamma(x_0, \varrho)$, la funzione $u$ così prolungata è lipschitziana in $\bar{S}$. Detta $k$ una costante non nulla, risulta evidentemente $-u/k + 1 = 1$ in $\bar{S}\setminus\Omega$. Allora per definizione di capacità rispetto ad $\Omega$ (definizione 2, valida, come facilmente si verifica, anche sostituendo funzioni lipschitziane a funzioni di classe $C^1$), si ha

$$\operatorname{cap}(p, S)(\bar{S}\setminus\Omega) \leqslant (2\varrho)^{-p} \|1 - u/k\|^p_{L_p(S)} + \|(u/k)_x\|^p_{L_p(S)}$$

da cui

$$|k|^p \operatorname{cap}(p, S)(\bar{S}\setminus\Omega) \leqslant (2\varrho)^{-p} \|u - k\|^p_{L_p(S)} + \|u_x\|^p_{L_p(S)} . \tag{9}$$

La (9) è valida anche se $k = 0$. Poniamo ora $k = (\operatorname{mis} S)^{-1} \int_S u(x)\, dx$ e applichiamo alla funzione $u$ nella sfera $S$ la disuguaglianza di

Poincaré (vedi ad esempio [8], teorema 6.6). Tenendo presente che $u_x = 0$ q.o. in $S \setminus \Omega$ si ha

$$(10) \qquad \|u-k\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant \|u-k\|_{L_{p^*}(S)} \leqslant K_7 \|u_x\|_{L_p(\Omega(x_0,\varrho))}$$

essendo $K_7$ una costante dipendente solo da $p$ e da $n$.

Dalla disuguaglianza di Hölder segue

$$(11) \qquad \|u\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant \|u-k\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} + |k|\,[\text{mis}\,\Omega(x_0,\varrho)]^{1/p^*}$$

$$(12) \qquad \|u-k\|_{L_p(S)} \leqslant (\text{mis}\, S)^{1/n} \|u-k\|_{L_{p^*}(S)} \,.$$

Infine dal Lemma 2 (applicato assumendo l'origine delle coordinate di $R^n$ nel punto $x_0$) risulta l'esistenza di una costante $K_8$, dipendente solo da $p$ e da $n$, tale che

$$(13) \qquad \text{cap}\,(p)(\bar{S}\setminus\Omega) \leqslant K_8\, \text{cap}\,(p, S)(\bar{S}\setminus\Omega)\,.$$

Allora dalle (9), ..., (13) si ottiene

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant \left\{ K_7 + \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^{1/p^*} K_8^{1/p} \varrho^{n/p^*} [\text{cap}\,(p)(\bar{S}\setminus\Omega)]^{-1/p} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[1 + \frac{K_7}{2}\left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{1/n}\right]\right\} \|u_x\|_{L_p(\Omega(x_0,\varrho))}$$

dalla quale e dalla (5) segue la (4).

($b$) $\Rightarrow$ ($a$). Per definizione di capacità, per ogni $\varrho$ con $0<\varrho<r_0$ e per ogni $\varepsilon>0$ esiste una funzione $v_\varrho \in C_0^1(R^n)$ tale che $v_\varrho \geqslant 1$ in $\Gamma(x_0, \varrho)$ e

$$(14) \qquad \|(v_\varrho)_x\|_{L_p(R^n)} \leqslant [\text{cap}\,(p)\,\Gamma(x_0,\varrho)]^{1/p} + \varepsilon\,.$$

Sostituendo eventualmente alla funzione $v_\varrho$ la funzione (lipschitziana, a supporto compatto e quindi ammissibile) $\min\,(v_\varrho, 1)$ si vede che non è restrittivo supporre

$$(15) \qquad v_\varrho = 1 \quad \text{in } \Gamma(x_0,\varrho)\,, \quad (0<\varrho<r_0)\,.$$

La funzione $1 - v_\varrho$ è nulla in $\Gamma(x_0, \varrho)$ e quindi, per la supposta condizione ($b$):

$$(16) \qquad \|1-v_\varrho\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant K_4 \|(v_\varrho)_x\|_{L_p(\Omega(x_0,\varrho))}\,, \quad (0<\varrho<r_0)\,.$$

Per noti teoremi sugli spazi $H_0^{1,p}(R^n)$, esiste una costante $K_6$, dipendente solo da $n$ e $p$, tale che

$$\|v_\varrho\|_{L_{p^*}(R^n)} \leqslant K_6 \|(v_\varrho)_x\|_{L_{p^*}(R^n)}, \qquad (0 < \varrho < r_0). \tag{17}$$

Allora dalle (14), (16), (17) segue

$$\begin{aligned}[\operatorname{mis} \Omega(x_0, \varrho)]^{1/p^*} &\leqslant \|v_\varrho\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} + \|1 - v_\varrho\|_{L_{p^*}(\Omega(x_0,\varrho))} \leqslant \\ &\leqslant (K_6 + K_4)\{[\operatorname{cap}(p)\,\Gamma(x_0, \varrho)]^{1/p} + \varepsilon\}\end{aligned} \tag{18}$$

valida per ogni $\varrho$ con $0 < \varrho < r_0$. La (3) è pertanto provata.

## 5. – Hölderianità delle soluzioni.

Come si è già osservato, la condizione ($a$) (e quindi anche le condizioni ($b$) e ($c$)) del teorema 1 è sufficiente a concludere che le soluzioni dell'equazione (19) sono hölderiane nel punto $x_0$ di $\partial\Omega$. Sussiste infatti il seguente

TEOREMA 2. – *Sia* $u \in H_0^1(\Omega)$ *soluzione dell'equazione*

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\, dx \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{19}$$

*ove* $f_i \in L_q(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *con* $q > n$. *Sia* $x_0 \in \partial\Omega$ *soddisfacente alla condizione* ($a$) *del teorema* 1, *nella quale sia* $1 < p \leqslant 2$. *Allora esistono costanti positive* $K_7, r^*, \lambda$ (*con* $\lambda < 1$) *tali che*

$$|u(x) - u(x_0)| \leqslant K_7 \sum \|f_i\|_{L_q(\Omega)} |x - x_0|^\lambda \tag{20}$$

*per ogni* $x \in \Omega$ *con* $|x - x_0| < r^*$.

La dimostrazione del teorema precedente è nota: si veda ad esempio [7], [8], [4]. L'unico punto forse nuovo è il fatto che basta la validità della condizione ($a$) per *un solo* valore di $p$ (purchè $1 < p \leqslant 2$) per ottenere la (20). Diamo soltanto un cenno di come si può modificare la dimostrazione di [8] a questo scopo.

Si distinguono due casi: $1 < p < 2$ e $p = 2$.

1° *caso.* Sia valida la condizione ($a$) del teorema 1 con $1 < p < 2$. Sia allora $u \in H^1(\Omega)$, $u \leqslant k_0$ su $\Gamma(x_0, \varrho)$ (con $0 < \varrho < r^*$) nel senso di $H^1(\Omega(x_0, \varrho))$ e $k_0 \leqslant k < h$.

La funzione $v = \min\{h - k, \max(u - k, 0)\}$ è nulla in $\Gamma(x_0, \varrho)$

nel senso di $H^1(\Omega(x_0, \varrho))$. Posto, per ogni $t$ reale:

$$A(t, \varrho) = \{x \in \Omega(x_0, \varrho) : u(x) > t\}$$

$$A'(t, \varrho) = \{x \in \Omega(x_0, \varrho) : u(x) \geqslant t\}$$

si applichi la (4) alla funzione $v$ sopra definita. Si ottiene

$$(21) \qquad (h-k)[\operatorname{mis} A'(h, \varrho)]^{1/p^*} \leqslant K_4 \|u_x\|_{L_p[A(k,\varrho) \setminus A'(h,\varrho)]} .$$

Dalla (21), applicando la disuguaglianza di Hölder, elevando al quadrato ed osservando che $\operatorname{mis} A(t, \varrho) \leqslant \operatorname{mis} A'(t, \varrho)$ per ogni $t$, risulta

$$(22) \qquad (h-k)^2[\operatorname{mis} A(h, \varrho)]^{2/p^*} \leqslant$$
$$\leqslant K_4^2 \|u_x\|^2_{L_2[A(k,\varrho) \setminus A(h,\varrho)]} [\operatorname{mis} A(k, \varrho) - \operatorname{mis} A(h, \varrho)]^{2/p-1} .$$

La (22) differisce dalla (6.6) di [8] soltanto per qualche esponente; si osservi peraltro che tutti gli esponenti nella (22) sono positivi. A questo punto è facile verificare che la (22), applicata alle soluzioni $u$ dell'equazione (19), permette di raggiungere la tesi procedendo come in [8].

2° *caso*. Sia valida la condizione ($a$) del teorema 1 con $p = 2$. In questo caso la (22) diventa

$$(22') \qquad (h-k)^2[\operatorname{mis} A(h, \varrho)]^{(n-2)/n} \leqslant K_4^2 \|u_x\|^2_{L_2[A(k,\varrho) \setminus A(h,\varrho)]}$$

e non permette più di ripetere inalterato il procedimento di [8]. Posto tuttavia $M = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega(x_0,\varrho)} u$, supponiamo intanto $c \equiv d_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $\Omega$, il che non è restrittivo come in [8]. Allora, come nel lemma 7.2 di [8], possiamo dimostrare che

$$(23) \qquad \lim_{h \to M^-} \operatorname{mis} A(h, \varrho) = 0 .$$

Infatti intanto non è restrittivo supporre $M > 0$ in quanto, come in [8], è lecito scambiare eventualmente $u$ con $-u$. Scelto un numero $k^*$ tale che $0 \leqslant k^* < M$, sia

$$k_s = M - 2^{-s}(M - k^*) , \quad (s = 0, 1, \ldots) .$$

Applichiamo ora la (18′) con $h = k_s$, $k = k_{s-1}$.

Si ha intanto

$$k_s - k_{s-1} = 2^{-s}(M - k^*)\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

da cui

$$(24) \qquad 4^{-s}(M - k^*)^2 \operatorname{mis} A(k_s, \varrho)^{(n-2)/n} \leqslant$$
$$\leqslant K_4^2 \|u_x\|^2_{L_2[A(k_s,\varrho)\setminus A(k_{s-1},\varrho)]}\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots)\,.$$

Detto $r$ un numero naturale maggiore di uno, le (24) si possono sommare per $s$ che va da 1 a $r$; osservando che $\operatorname{mis} A(k_s, \varrho)$ è una funzione non crescente di $s$, si ottiene

$$(25) \qquad (M - k^*)^2[\operatorname{mis} A(k_r, \varrho)]^{(n-2)/n} \sum_{s=1}^{n} 4^{-s} \leqslant K_4^2 \|u_x\|^2_{L_2[A(k_r,\varrho)\setminus A(k^*,\varrho)]}\,.$$

Dal lemma 5.3 di [8] si ha poi, posto in esso $v = \max(u - k_r, 0)$ e $\alpha \in C_0^1(S(x_0, 2\varrho))$ con $\alpha = 1$ in $S(x_0, \varrho)$ e $|\alpha_x| \leqslant 2/\varrho$ (confronta lemma 7.2 di [8]):

$$(26) \qquad \|u_x\|^2_{L_2[A(k_r,\varrho)]} \leqslant K_8\, \varrho^{n-2}(M - k_r)^2\,,$$

essendo $K_8$ una costante dipendente da $n$ e dai coefficienti della forma bilineare $a(\cdot\,, \cdot)$.

Poichè, come subito si verifica, $M - k_r = 2^{-r}(M - k^*)$, dalle (25), (26) segue

$$[\operatorname{mis} A(k_r, \varrho)]^{(n-2)/n} \sum_{s=1}^{r} 4^{-s} \leqslant K_4^2 K_8\, \varrho^{n-2}\, 4^{-r}$$

cioè

$$(27) \qquad [\operatorname{mis} A(k_r, \varrho)]^{(n-2)/n} \leqslant K_4^2 K_8 \Big(\sum_{j=0}^{r-1} 4^j\Big)^{-1} \varrho^{n-2}\,.$$

Dalla (27) si ottiene

$$\lim_{r\to+\infty} \operatorname{mis} A(k_r, \varrho) = 0$$

cioè la (23). Di qui il resto della dimostrazione procede come in [8].

## BIBLIOGRAFIA

[1] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Punti regolari per una classe di operatori ellittici non lineari*, Ricerche Mat., **21** (1972), pp. 3-16.

[2] M. CHICCO, *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **4** (1971), pp. 668-676.

[3] W. F. DONOGHUE, *A coerciveness inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **20** (1966), pp. 589-593.

[4] R. GARIEPY - W. P. ZIEMER, *Behavior at the boundary of solutions of quasilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **56** (1974), pp. 372-384.

[5] O. A. LADYZHENSKAYA - N. N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations*, New York, Academic Press, 1968.

[6] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17** (1963), pp. 43-77.

[7] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl., **51** (1960), pp. 1-37.

[8] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), pp. 189-258.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'* U. M. I.
*il 25 ottobre 1977*