UNIVERSITÀ DI GENOVA

n° 18 ottobre 1979

MAURIZIO CHICCO

Una identità integrale

RAPPORTI SCIENTIFICI
DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA
VIA L. B. ALBERTI 4
16132 GENOVA

UNA IDENTITA' INTEGRALE

Maurizio Chicco (Genova)(*)

Summary. This work contains a proof of the integral identity

$$\int_{\partial\Omega} \left[\operatorname{div} v - \frac{\partial}{\partial N}(v\cdot N) + (m-1)H\, v\cdot N\right] d\sigma = 0$$

where Ω is a bounded open set in R^m with smooth boundary $\partial\Omega$, v is a vector field of class $C^1(R^m)$, N is the normal direction to $\partial\Omega$ (defined in a neighborhood of $\partial\Omega$ in the natural way), H is the mean curvature of $\partial\Omega$.

1. INTRODUZIONE.

Nello studio di certi problemi al contorno per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari ellittiche del secondo ordine (vedi [1]), mi sono imbattuto in una identità integrale che forse non è nota e che può avere un certo interesse anche a sè stante. Essa contiene come caso particolare una simile identità già usata da Talenti in [4].

Ringrazio i professori Giorgio Talenti ed Enrico Massa che mi hanno dato utili suggerimenti per la dimostrazione di questo risultato.

2. NOTAZIONI ED IPOTESI.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^m $(m \geq 2)$ con frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Sia N il versore della normale a $\partial\Omega$, orientato verso l'esterno. La definizione di N è estesa a tutto un intorno di $\partial\Omega$ attraverso la costruzione delle coordinate

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del "Centro di Studio per la Matematica e la Fisica Teorica" del C.N.R., Genova. (Anno accademico 1973-74).

gaussiane associate alla superficie $\partial\Omega$ (vedi ad esempio [2] pag. 57). Come è ben noto, ciò consiste nel definire $N(x)$, per ogni x abbastanza vicino a $\partial\Omega$, come il versore della tangente alla geodetica passante per x e ortogonale a $\partial\Omega$. Sia v un campo vettoriale ad m componenti, definito e di classe C^1 in un intorno di $\partial\Omega$; sia H la curvatura media di $\partial\Omega$. Indichiamo con $a\cdot b$ il prodotto scalare di due vettori $a,b (\in R^m)$, con $\operatorname{div} v$ la divergenza del campo vettoriale v, con $\frac{\partial}{\partial N}$ la derivata nella direzione N su $\partial\Omega$. Per altre notazioni e proprietà dei campi vettoriali, si veda ad esempio [3].

3. RISULTATI.

Teorema. Nelle ipotesi dette sopra, risulta

$$\int_{\partial\Omega} \left[\operatorname{div} v - \frac{\partial}{\partial N}(v\cdot N) + (m-1)H\, v\cdot N \right] d\sigma = 0 .$$

Dimostrazione. Sia Γ una porzione di $\partial\Omega$ rappresentabile come grafico di una funzione di classe C^2. Allora esistono un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di $R^m(x^1,x^2, \dots, x^m)$, un dominio $D \subset R^{m-1}$ ed una funzione vettoriale f di classe $C^2(D)$, a valori in R^m, tale che

$$\Gamma \subset \left\{ x \in R^m : x = f(y^1,y^2, \dots, y^{m-1}),\ (y^1,y^2, \dots, y^{m-1}) \in D \right\}.$$

La funzione vettoriale f può essere inoltre scelta in modo che risulti

$$\min_{\bar{D}} \sum_{j=1}^{m} \det \left\| \frac{\partial(f^1,f^2,\dots,f^{j-1},f^{j+1},\dots,f^m)}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^{m-1})} \right\| > 0 .$$

Sia φ una funzione scalare di classe $C_0^\infty(R^m)$ tale che $(\operatorname{supp}\varphi) \cap \partial\Omega \subset \Gamma$; proviamo che

$$\int_{\Gamma} \left[\operatorname{div}(\varphi v) - \frac{\partial}{\partial N}(\varphi\, v\cdot N) + (m-1)H\, \varphi\, v\cdot N \right] d\sigma = 0. \tag{1}$$

Posto per brevità

(2) $$N(y^1,y^2,\ldots,y^{m-1}) = N\left[f(y^1,y^2,\ldots,y^{m-1})\right], \quad \forall (y^1,y^2,\ldots,y^{m-1}) \in D,$$

consideriamo le coordinate curvilinee in R^m $(y^1,y^2,\ldots,y^m)$ definite da

(3) $$x = f(y^1,y^2,\ldots,y^{m-1}) + y^m N(y^1,y^2,\ldots,y^{m-1}) .$$

Allora se $\delta > 0$ è abbastanza piccolo, le (3) stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra $D\times(-\delta,\delta)$ ed un intorno di Γ. Posto

(4) $$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^j} \quad (i,j = 1,2,\ldots,m)$$

(5) $$g = \det \left\| g_{ij} \right\|$$

risulta, per il teorema di Binet:

$$g = \left\{ \det \left\| \frac{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^m)}{\partial(y^1,y^2,\ldots,y^m)} \right\| \right\}^2$$

e quindi, dalle (3):

(6) $$\sqrt{g} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} + y^m \frac{\partial N^1}{\partial y^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f^m}{\partial y^1} + y^m \frac{\partial N^m}{\partial y^1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial y^{m-1}} + y^m \frac{\partial N^1}{\partial y^{m-1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f^m}{\partial y^{m-1}} + y^m \frac{\partial N^m}{\partial y^{m-1}} \\ N^1 & \cdots\cdots & N^m \end{vmatrix} .$$

Calcoliamo in particolare $\sqrt{g}\Big|_{y^m=0}$. Posto

$$h^i = \det \left\| \frac{\partial(f^1,f^2,\ldots,f^{i-1},f^{i+1},\ldots,f^m)}{\partial(y^1,y^2,\ldots,y^{m-1})} \right\| \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

è noto che

$$N^i\left[\sum_{j=1}^{m}(h^j)^2\right]^{\frac{1}{2}} = h^i \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

quindi

$$\sqrt{g}\Big|_{y^m=0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots\dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial y^{m-1}} & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^{m-1}} \\ N^1 & \dots\dots\dots & N^m \end{vmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{m}(h^j)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots\dots\dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial y^{m-1}} & \dots\dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^{m-1}} \\ h^1 & \dots\dots\dots\dots & h^m \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m}(h^j)^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

D'altra parte, per definizione di integrale superficiale e per le (3), (7) si ha, per ogni funzione F definita su Γ :

$$(8) \qquad \int_\Gamma F(x)d\sigma = \int_D \Big[F(x(y)) \ \sqrt{g}\Big]_{y^m=0} dy^1dy^2 \dots dy^{m-1}$$

e quindi in particolare

$$(9) \qquad \int_\Gamma \mathrm{div}(\varphi v)d\sigma = \int_D \Big[\mathrm{div}(\varphi v) \ \sqrt{g}\Big]_{y^m=0} dy^1dy^2 \dots\dots dy^{m-1}.$$

Esprimiamo ora $\mathrm{div}(\varphi v)$ in funzione delle coordinate curvilinee $(y^1,y^2,\dots,y^m)$: risulta (vedi ad esempio [3] pag. 71) :

$$(10) \qquad \int_\Gamma \mathrm{div}(\varphi v)d\sigma = \sum_{j=1}^{m}\int_D \left[\frac{\partial}{\partial y^j}(\sqrt{g}\,\varphi v^j)\right]_{y^m=0} dy^1dy^2 \dots dy^{m-1} =$$

$$= \int_D\left[\frac{\partial}{\partial y^m}(\sqrt{g}\,\varphi v^m)\right]_{y^m=0} dy^1dy^2\dots dy^{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1}\int_D\left[\frac{\partial}{\partial y^j}(\sqrt{g}\,\varphi v^j)\right]_{y^m=0} dy^1dy^2\dots dy^{m-1},$$

essendo ora v^j $(j = 1,2, \dots, m)$ le componenti controvarianti del vettore v nel sistema di coordinate $(y^1,y^2, \dots,y^m)$ definito dalle (3) .

Il secondo termine dell'ultimo membro della (10) non è altro che l'integrale della divergenza (in R^{m-1}) del campo vettoriale (m-1)-dimensionale $\left(\sqrt{g}\,\varphi\, v^1, \sqrt{g}\,\varphi\, v^2, \ldots, \sqrt{g}\,\varphi\, v^{m-1}\right)\Big|_{y^m=0}$. Per la scelta di φ le funzioni $\sqrt{g}\,\varphi\, v^j\Big|_{y^m=0}$ $(j=1,2,\ldots,m-1)$ hanno supporto compatto in D quindi, per il teorema della divergenza, si ha:

$$\sum_{j=1}^{m-1}\int_D \left[\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\sqrt{g}\,\varphi\, v^j\right)\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \ldots dy^{m-1} = 0\,. \tag{11}$$

Calcoliamo ora $\dfrac{\partial}{\partial y^m}\left(\varphi v^m\right)\Big|_{y^m=0}$. Dalle (3) si ha subito

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^m} = N^k \quad (k = 1,2,\ldots, m) \tag{12}$$

inoltre per la condizione di ortogonalità

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial f^h}{\partial y^k} N^h = 0 \quad (k = 1,2,\ldots, m-1)$$

si verifica facilmente che

$$v^m = v\cdot N \tag{13}$$

ed ovviamente $x \in \Gamma$ se e solo se $y^m = 0$. Quindi, cambiando le variabili:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^m}\left(\varphi v^m\right)\right]_{y^m=0} = \left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial(\varphi v^m)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^m}\right]_{y^m=0} = \left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial(\varphi v^m)}{\partial x^k}N^k\right]_{\Gamma} = \left[\frac{\partial(\varphi\, v\cdot N)}{\partial N}\right]_{\Gamma}. \tag{14}$$

Per calcolare $\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial y^m}\Big|_{y^m=0}$, ricordiamo che per le (3), (4) si può scrivere

$$g_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial f^h}{\partial y^i} + y^m\frac{\partial N^h}{\partial y^i}\right)\left(\frac{\partial f^h}{\partial y^j} + y^m\frac{\partial N^h}{\partial y^j}\right), & i,j = 1,2,\ldots, m-1;\\ \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial f^h}{\partial y^i} + y^m\frac{\partial N^h}{\partial y^i}\right)N^h = 0\,, & i = 1,2,\ldots, m-1,\ j=m \\ & \text{oppure } j=1,2,\ldots,m-1,\ i=m;\\ \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\left(N^h\right)^2 = 1\,, & i = j = m\,, \end{cases}$$

da cui segue (si osservi che $g_{ij}=g_{ji}$ per $i,j = 1,2, \ldots, m$):

$$(15) \qquad \left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = \begin{cases} 2 \displaystyle\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial f^h}{\partial y^i} \frac{\partial N^h}{\partial y^j}, & i,j = 1,2, \ldots, m-1, \\ 0, & i = m \text{ oppure } j=m \\ & \text{oppure } j=i=m. \end{cases}$$

Indichiamo con g^{ij} $(i,j = 1,2, \ldots, m)$ gli elementi della matrice inversa di g_{ij} ; allora risulta evidentemente

$$g = \sum_{h=1}^{m} g_{ih}\, g^{ih}\, g \qquad (i = 1,2, \ldots, m)$$

e dalla regola di derivazione di un determinante segue

$$(16) \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m}\, g^{ik}\, g \Big|_{y^m=0} .$$

Dalle (15), (16) si ricava

$$(17) \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = 2g \sum_{i,k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^j}{\partial y^i} \frac{\partial N^j}{\partial y^k}\, g^{ik} .$$

D'altra parte la curvatura media H di Γ si può esprimere mediante le coordinate curvilinee $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ come segue (vedi ad esempio [2] pag. 152-154, [4] pag. 295):

$$H = -\frac{1}{m-1} \sum_{i,k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^j}{\partial y^i} \frac{\partial N^j}{\partial y^k}\, g^{ik}$$

per cui la (17) fornisce

$$(18) \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = -2(m-1)gH ,$$

e quindi

$$(19) \qquad \left.\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left.\frac{\partial g}{\partial y^m}\right|_{y^m=0} = -(m-1)\sqrt{g}\, H .$$

Dalle (7), (8), (13), (14), (19) si deduce allora

$$(20)\qquad \int_D \left[\frac{\partial}{\partial y^m}(\sqrt{g}\,\varphi\, v^m)\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \dots dy^{m-1} =$$

$$= \int_D \left[\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial y^m}(\varphi v^m)\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \dots dy^{m-1} + \int_D \left[\varphi v^m \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^m}\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \dots dy^{m-1} =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial N}(\varphi\, v\cdot N)\, d\sigma - (m-1)\int_\Gamma H\varphi\, v\cdot N\, d\sigma .$$

Allora dalle (9), (10), (11), (20) segue la (1).

Per passare dalla (1) alla tesi del teorema, basta considerare una partizione dell'unità su $\partial\Omega$, cioè una famiglia finita di funzioni $\varphi_k \in C_o^\infty(R^m)(k=1,2,\dots,r)$ tali che $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^{r} \varphi_k = 1$ in un intorno di $\partial\Omega$, e $(\mathrm{supp}\ \varphi_k)\cap\partial\Omega$ sia rappresentabile come grafico di una funzione di classe C^2 (per $k=1,2,\dots,r$).

Allora allo stesso modo in cui si è ottenuta la (1) si ottiene

$$\int_{\partial\Omega}\left[\mathrm{div}(\varphi_k v) - \frac{\partial}{\partial N}(\varphi_k v\cdot N) + (m-1)\varphi_k\, Hv\cdot N\right] d\sigma = 0 \qquad (k=1,2,\dots,r);$$

sommando queste uguaglianze per k che va da 1 a r si ottiene la tesi . ■

Un risultato noto, dovuto a Talenti ([4], lemma 1 pag. 294) si può ottenere come corollario del teorema precedente. Premettiamo un semplice lemma.

LEMMA. Siano u,w campi vettoriali ad m componenti, definiti in un aperto A di R^m ed ivi di classe C^1. Se in un punto $x_o \in A$ risulta

$$u(x_o)\cdot w(x_o) = \pm |u(x_o)|\,|w(x_o)| \neq 0 ,$$

allora è

$$\frac{\partial(u\cdot w)}{\partial\xi}(x_o) = \pm\frac{\partial(|u|\,|w|)}{\partial\xi}(x_o)$$

essendo ξ una qualunque direzione.

Dimostrazione. Basta considerare la funzione scalare

$$h(x) = \frac{u(x)\cdot w(x)}{|u(x)|\,|w(x)|}$$

definita e di classe C^1 in un intorno di x_o. Essendo evidentemente $-1 \leq h(x) \leq 1$, la funzione h ammette per ipotesi nel punto x_o un punto di massimo o di minimo assoluto, pertanto

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \xi}(x_o) = \frac{|u(x_o)|\,|w(x_o)|\,\frac{\partial(u\cdot w)}{\partial \xi}(x_o) - u(x_o)\cdot w(x_o)\,\frac{\partial(|u|\,|w|)}{\partial \xi}(x_o)}{|u(x_o)|^2\,|w(x_o)|^2}$$

da cui la tesi. ■

COROLLARIO. (Talenti). Sia p un campo vettoriale di R^m di classe C^1, sia Γ una ipersuperficie di classe C^2 contenuta nel dominio di p, sia N il versore della normale a Γ. Se la restrizione di p a Γ è orotgonale a Γ si ha

$$\int_\Gamma \left[N\cdot p \,\mathrm{div}\, p - \frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial N} + (m-1)Hp^2\right] d\sigma = 0 .$$

Dimostrazione. Si applica il teorema precedente al campo vettoriale

$$v = (p\cdot N)p$$

dopo aver fatto le seguenti osservazioni:

1) Anche se la superficie Γ non è chiusa come $\partial\Omega$, si può ripetere ugualmente la dimostrazione del teorema in questo caso. Infatti il fatto che la superficie Γ sia chiusa si è usato soltanto per provare la (11).

Ma questo è vero, nel nostro caso, anche se la funzione φ non ha supporto compatto in Γ. Infatti siano $(v^1, v^2, \ldots, v^m)$ le componenti controvarianti del vettore $v = (p\cdot N)p$ nel sistema di coordinate $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ definite dalle (3). Essendo v, come p, ortogonale a Γ, risulta $v^j(y^1, y^2, \ldots, y^{m-1}, 0) = 0$

per ogni $j=1,2, \ldots, m-1$ e per ogni $(y^1, y^2, \ldots, y^{m-1}) \in D$.

Ne segue ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial y^j}(\sqrt{g}\, v^j)\Big|_{y^m=0} = 0 \qquad \forall\ j=1,2,\ldots,m-1, \quad \forall (y^1, y^2, \ldots, y^{m-1}) \in D$$

e quindi

$$(11') \qquad \sum_{j=1}^{m-1} \int_D \left[\frac{\partial}{\partial y^j}(\sqrt{g}\, v^j)\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \ldots dy^{m-1} = 0 .$$

Pertanto la (10) si può riscrivere, ponendovi $\varphi = 1$, semplicemente

$$(10') \qquad \int_\Gamma \operatorname{div} v \, d\sigma = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial y^m}(\sqrt{g}\, v^m)\right]_{y^m=0} dy^1 dy^2 \ldots dy^{m-1}$$

e il resto della dimostrazione procede nello stesso modo come nel teorema.

2) Risulta evidentemente, essendo $v = (p\cdot N)p$:

$$(21) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} v = p\cdot N \operatorname{div} p + p\cdot \operatorname{grad}(p\cdot N) \\ \dfrac{\partial}{\partial N}(v\cdot N) = \dfrac{\partial}{\partial N}(p\cdot N)^2 = 2\, p\cdot N \dfrac{\partial}{\partial N}(p\cdot N) \\ H\, v\cdot N = H(p\cdot N)^2. \end{cases}$$

Per ipotesi p è, su Γ, ortogonale a Γ, quindi $p = (p\cdot N)N$ e $|p\cdot N| = |p|$ su Γ.

Tenendo conto di ciò si ha, su Γ :

$$(22) \qquad \begin{cases} p\cdot \operatorname{grad}(p\cdot N) = p\cdot N \dfrac{\partial}{\partial N}(p\cdot N) \\ H(p\cdot N)^2 = H\, p^2. \end{cases}$$

Infine applichiamo il lemma ai campi vettoriali $u = p$ e $w = N$ nei punti di Γ in cui $p \neq 0$: risulta allora:

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(p\cdot N)}{\partial N} = \dfrac{\partial |p|}{\partial N} & \text{nei punti di } \Gamma \text{ ove } p \neq 0,\ |p| = p\cdot N, \\ \dfrac{\partial(p\cdot N)}{\partial N} = -\dfrac{\partial |p|}{\partial N} & \text{nei punti di } \Gamma \text{ ove } p \neq 0,\ |p| = -p\cdot N \end{cases}$$

La prima delle (22), le (23) e il fatto che $|p| = |p \cdot N|$ su Γ provano che

$$(24) \qquad p \cdot \text{grad}\,(p \cdot N) = |p| \frac{\partial |p|}{\partial N} = \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial N}$$

la quale è evidentemente vera su tutto Γ (anche ove $p = 0$). Sostituendo le (21), (22), (24) nella tesi del teorema si ha la tesi del corollario. ■

B I B L I O G R A F I A

1 M. CHICCO : Problema di Neumann per equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes (in preparazione).

2 L.P. EISENHART: Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1926.

3 A. LICHNEROWICZ: Elements of Tensor Calculus. Methuen, London, 1962.

4 G. TALENTI: Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 69 (1965), 285-304.