Ricerche di Matematica
Suppl. Vol. XXXVI (1987)

Sull'equazione ellittica di V. Iftimie

MAURIZIO CHICCO (*) (**)

1. Introduzione

In un lavoro del 1968 [7], V. Iftimie introdusse una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine, lineari, in forma non variazionale, a coefficienti discontinui, dimostrando per esse un teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Dirichlet.

Poiché in tale lavoro venivano fatte particolari ipotesi sulla frontiera di Ω (soddisfatte ad esempio se Ω è convesso), può essere non privo di interesse provare il risultato di Iftimie anche per gli insiemi Ω dotati di frontiera sufficientemente regolare. Con l'occasione si considera un'equazione dotata anche di termini di ordine inferiore al secondo.

2. Notazioni ed ipotesi

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n $(n \geq 3)$. Sulla frontiera di Ω si suppone quanto segue. Per ogni punto x_0 di $\partial\Omega$ supponiamo che esista una sfera S di centro x_0 tale che: o $(\partial\Omega) \cap S$ si può rappresentare come grafico di una funzione di classe C^2, oppure $(\partial\Omega) \cap S$ è unione finita di grafici di funzioni di classe C^2, e inoltre $\Omega \cap S$ è convesso.

Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum a_{ij} t_i t_j \geq \nu |t|^2$ per ogni $t \in R^n$, q.o. in Ω, essendo ν costante positiva; $b_i \in L_n(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_p(\Omega)$ con $p = 2$ se $n = 3$, $p > 2$ se $n = 4$, $p = n/2$ se $n \geqslant 5$.

Posto

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} - (n-3)\, a_{nn}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.A.F.A.-C.N.R.

(**) Istituto Matematico di Ingegneria, Piazzale Kennedy, pad. D, 16129 Genova.

si suppone che esistano costanti γ, δ tali che

$$A \geq \delta > 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \frac{1}{A}\left[(a_{ii}-a_{nn})^2 + 4\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^2\right]^{1/2} \leq \gamma < 1\,. \tag{2}$$

Siano L, L_0 rispettivamente gli operatori

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\,,$$

$$L_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,.$$

Sia infine

$$u_x = \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right)^{1/2},$$

$$u_{xx} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\right)^{1/2}.$$

3. Osservazioni sulle ipotesi (1), (2)

Nel citato lavoro [7] di Iftimie, in luogo delle (1), (2) si suppone

$$|A| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} - (n-3)\,a_{nn}\right| \geq \delta > 0\,, \tag{1'}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \frac{1}{|A|}\left[(a_{ii}-a_{nn})^2 + 4\sum_{j=1+1}^{n} a_{ij}^2\right]^{1/2} \leq \gamma < 1 \tag{2'}$$

che sono apparentemente più generali delle (1), (2). Facciamo vedere tuttavia che se valgono le (1'), (2'), la (1') è equivalente alla (1) (e quindi la (2') alla (2)), in quanto è necessariamente $A > 0$ q.o. in Ω.

Per assurdo supponiamo dunque che, valendo le (1'), (2'), esista un sottoinsieme B di Ω, avente misura positiva, tale che

$$A \leq -\delta \quad \text{q.o. in } B.$$

Ne segue che q.o. in B risulta

$$\delta \le -A = (n-3)\,a_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \le (n-1)\,a_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a_{nn} - a_{ii}) \le \sum_{i=1}^{n-1} |a_{ii} - a_{nn}|$$

da cui

$$1 \le \operatorname{ess\,sup}_B \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|a_{nn} - a_{ii}|}{-A} \le \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ess\,sup}_\Omega \frac{|a_{ii} - a_{nn}|}{|A|} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ess\,sup}_\Omega \frac{1}{|A|} \left[(a_{ii} - a_{nn})^2 + 4 \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij}^2 \right]^{1/2} \le \gamma < 1$$

assurdo. Le (1), (2) sono pertanto equivalenti alle (1′), (2′) di Iftimie.

4. Risultato

TEOREMA. – *Siano verificate le ipotesi precedenti, e inoltre sia* $\operatorname{ess\,inf}_\Omega c > 0$. *Allora, data comunque f in* $L_2(\Omega)$, *il problema di Dirichlet*

$$(3) \qquad \begin{cases} Lu = f \quad q.o.\ in\ \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione.

Dimostrazione. – Allo scopo di provare la tesi, non è restrittivo supporre $A \equiv 1$ in Ω. Infatti, posto

$$L_A = \frac{1}{A} L$$

l'operatore L_A è, per la (1), ancora uniformemente ellittico, soddisfa le ipotesi (1), (2) e i coefficienti b_i/A $(i = 1, 2, \ldots, n)$, c/A appartengono alle stesse classi di sommabilità di b_i, c rispettivamente. Inoltre l'equazione $Lu = f$ q.o. in Ω è evidentemente equivalente a $L_A u = f/A$. Pertanto supponiamo senz'altro $A \equiv 1$ in Ω.

Sia $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. Se supp $\varphi \subset \Omega$, per i risultati di [7] si ha

$$(4) \qquad \|\varphi u\|_{H^2(\Omega)} \le K_1 \|L_0(\varphi u)\|_{L_2(\Omega)}$$

essendo K_1 una costante dipendente dai coefficienti di L_0.

Sia ora $(\operatorname{supp}\varphi) \cap \partial\Omega \neq \phi$; supponiamo dapprima che esista una sfera S tale che $\operatorname{supp}\varphi \subset S$, $S \cap \Omega$ sia convesso e $(\partial\Omega) \cap S$ sia unione finita di superfici di classe C^2. In tale caso ancora per i risultati di [7] si ottiene la (4).

Veniamo ora al caso in cui $\operatorname{supp}\varphi \subset S$, ove S ha centro appartenente a $\partial\Omega$ e $(\partial\Omega) \cap S$ è rappresentabile come grafico di una funzione di classe C^2. A meno di una traslazione di coordinate (che non altera il problema), supponiamo che il centro di S sia il punto $(0, 0, \ldots, 0)$ e che $(\partial\Omega) \cap S$ sia rappresentabile ad esempio con l'equazione cartesiana $x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Posto

$$k_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0, 0, \ldots, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

come in [3] consideriamo il cambiamento di variabili $y = \mathcal{T}(x)$ definito da

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} y_i = x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ y_n = x_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j x_j - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) . \end{cases}$$

È chiaro che l'insieme $U' = \mathcal{T}(\Omega \cap S)$ ha una parte di frontiera piana, e inoltre

$$\text{(6)} \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(y) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

per le (5) e per la definizione dei k_i. Come in [3] si vede allora che l'equazione nelle nuove coordinate si scrive

$$\text{(7)} \qquad - \sum_{l,r=1}^{n} \beta_{lr}(y) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_r} + \sum_{r=1}^{n} \beta_r(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_r} = \tilde{f}(y) , \qquad y \in U'$$

dove si è posto

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \beta_{lr}(y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \dfrac{\partial y_l}{\partial x_i} \dfrac{\partial y_r}{\partial x_j} & (l, r = 1, 2, \ldots, n) \\ \beta_r(y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \dfrac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} & (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

e inoltre $\tilde{f}(y) = f[\mathcal{T}^{-1}(y)]$, $\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}[\mathcal{T}^{-1}(y)]$, $\tilde{u}(y) = u[\mathcal{T}^{-1}(y)]$, ecc.

Siano ora δ', γ' due numeri reali tali che $O < \delta' < \delta$, $\gamma < \gamma' < 1$. Tenuto conto delle (1), (2), (6), (7), (8) è possibile determinare un numero $r_0 > 0$

tale che se $0<r\leq r_0$ risulti

$$\begin{cases} A'(y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ii}(y) - (n-3)\beta_{nn}(y) \geq \delta' \quad \text{q.o. in } U', \\ \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ess\,sup}_{U'} \frac{1}{A'} \left[(\beta_{ii}-\beta_{nn})^2 + 4 \sum_{j=i+1}^{n} \beta_{ij}^2 \right]^{1/2} \leq \gamma' . \end{cases}$$

In altre parole la nuova equazione (dopo il cambiamento di variabili (5)) soddisfa condizioni analoghe alle (1), (2) nell'insieme U' il quale, come già si è osservato, ha una parte di frontiera piana; anzi, più precisamente, risulta

$$(\operatorname{supp} \tilde{\varphi}) \cap \partial U' \subset \left\{ y \in R^n \colon y_n - \sum_{j=1}^{n-1} k_j y_j = 0 \right\}.$$

Per tali motivi si possono applicare i risultati di Iftimie [7] all'equazione (7) in U'. Scrivendo $\tilde{\varphi}\tilde{u}$ al posto di $\tilde{u}$ e indicando con $\tilde{L}_0$ l'operatore della (7), si ottiene una maggiorazione (analoga alla (4)):

$$\|\tilde{\varphi}\tilde{u}\|_{H^2(U')} \leq K_2[\|\tilde{L}_0(\tilde{\varphi}\tilde{u})\|_{L_2(U')} + \|(\tilde{\varphi}\tilde{u})_y\|_{L_2(U')}] \tag{9}$$

essendo K_2 una costante dipendente dai coefficienti di $\tilde{L}_0$ e da g.

Sia ora $\varepsilon>0$ arbitrario. Per le (6), (8) e noti teoremi sugli spazi di Sobolev, tenuto conto della corrispondenza biunivoca (di classe C^2) tra U' e $\Omega \cap S(O, r)$, pur di prendere r_0 abbastanza piccolo, dalla (9) si deduce

$$\|\varphi u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_3[\|L_0(\varphi u)\|_{L_2(\Omega)} + \varepsilon\|\varphi u\|_{H^2(\Omega)} + \|(\varphi u)_x\|_{L_2(\Omega)}] \tag{10}$$

ove la costante K_3 dipende dai coefficienti di L_0 e dalla frontiera di Ω, ma non da ε.

Consideriamo ora una famiglia finita di sfere (aperte) S_j $(j=1, 2, \dots, k)$ in R^n la cui unione contenga $\bar{\Omega}$; tali sfere possono essere scelte con raggio $r<r_0$ (determinato come sopra), e contenute in Ω oppure aventi centro su $\partial\Omega$. Sia φ_j $(j=1, 2, \dots, k)$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{S_j\}$, cioè $\varphi_j \in C_0^\infty(S_j)$, $0\leq\varphi_j\leq 1$ $(j=1, 2, \dots, k)$, $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$ in $\bar{\Omega}$. Allora per la scelta di tali φ_j, per la (4) e (10) risulta

$$\|\varphi_j u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_4[\|L_0(\varphi_j u)\|_{L_2(\Omega)} + \|(\varphi_j u)_x\|_{L_2(\Omega)}] \qquad (j=1, 2, \dots, k) \tag{11}$$

essendo u una qualunque funzione di $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e K_4 una costante dipendente dagli stessi argomenti di K_3.

Si osserva ora che risulta

(12) $$L_0(\varphi_j u) = \varphi_j L_0 u - 2 \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(\varphi_j)_{x_r} u_{x_s} - \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(\varphi_j)_{x_r x_s} u\,;$$

inoltre, per note proprietà degli spazi di Sobolev, per ogni $\theta > 0$ e $u \in H^2(\Omega)$

(13) $$\|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leq \theta \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} + K(\theta)\|u\|_{L_2(\Omega)}$$

essendo $K(\theta)$ una costante dipendente da θ, n e Ω. Dalle (11), (12), (13) si deduce

(14) $$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_5[\|L_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

valida per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con K_5 dipendente dai soliti argomenti.

A questo punto occorre ripetere la dimostrazione precedente (fino ad ottenere la (14)) per l'operatore $u \to (L_0 + \lambda)\,u$, essendo λ una costante reale positiva. Si consideri l'identità (1'), pag. 1357, di Iftimie [7]. Avendosi supposto $A \equiv 1$ in Ω, essa si scrive

$$-\Delta u = 2L_0 u - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(a_{ii} - a_{nn}) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}$$

e quindi

$$-\Delta u + 2\lambda u = 2(L_0 + \lambda u) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(a_{ii} - a_{nn}) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}$$

Pertanto, procedendo come in [7]:

(15) $$\|-\Delta u + 2\lambda u\|_{L_2(\Omega)} \leq K_6 \|L_0 u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \gamma \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}$$

essendo $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e K_6 dipendente dai coefficienti di L_0 e da Ω.

Ma risulta banalmente, essendo $\lambda \geq 0$:

(16) $$\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|-\Delta u + 2\lambda u\|_{L_2(\Omega)}$$

quindi dalle (15), (16) si perviene alla stessa maggiorazione a priori di Iftimie per $L_0 u + \lambda u$. Così la (4) si può riscrivere

(17) $$\|\varphi u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_7 \|L_0(\varphi u) + \lambda \varphi u\|_{L_2(\Omega)}$$

ove $\lambda \geq 0$ e φ è scelta come in precedenza. Si osservi che la costante K_7 dipende da Ω e dai coefficienti di L_0, ma non da λ. Anche il resto della dimostrazione precedente si può ripetere, sulla base della (17), per l'operatore $L_0 + \lambda I$ in luogo di L_0, ottenendo così una disuguaglianza analoga alla (14):

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le K_8[\|L_0 u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}] \tag{18}$$

per ogni $\lambda \ge 0$ e $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. La costante K_8 dipende dai coefficienti di L_0 e da Ω.

Dalle ipotesi fatte sui coefficienti b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, c e dalla (13) segue che, per ogni $\eta > 0$ e ogni $u \in H^2(\Omega)$ risulta

$$\|Lu - L_0 u\|_{L_2(\Omega)} \le \eta \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} + K_\eta \|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{19}$$

essendo K_η una costante dipendente da η e da Ω, b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, c. Dalle (18), (19) scegliendo $0 < \eta < 1/(2K_8)$ si perviene alla disuguaglianza

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le K_9[\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}] \tag{20}$$

valida per ogni $\lambda \ge 0$ e per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, essendo K_9 dipendente dai coefficienti di L, da n e da Ω. Dalla (20), con procedimenti noti (vedi ad esempio [9], [2]), si ottiene

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le K_{10} \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \tag{21}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda \ge \lambda_0$, essendo λ_0 e K_{10} costanti dipendenti dai coefficienti di L, da n e da Ω. Osserviamo ora che, per le ipotesi fatte su Ω e scegliendo $\lambda \ge \lambda_0 \ge 0$, il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione (vedi ad esempio [8]). Pertanto per la (21) e applicando il metodo di prolungamento del parametro si deduce anche l'esistenza ed unicità della soluzione del problema

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \end{cases} \tag{22}$$

essendo f data comunque in $L_2(\Omega)$ e $\lambda \ge \lambda_0$ (scelto come nella (21)). Dalla (22), collo stesso procedimento di [4], si ottiene la tesi, cioè esistenza ed unicità della soluzione del problema (3) non appena $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$.

COROLLARIO. – *Se* $b_i \in L_\infty(\Omega)$ *per almeno un valore di* $i (1 \le i \le n)$, *il problema di Dirichlet* (3) *ha una ed una sola soluzione non appena* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c \ge 0$.

Dimostrazione. – È la stessa ad esempio di [3].

5. L'equazione di A. Canfora

Nel lavoro [1] A. Canfora ha introdotto l'operatore ellittico

$$L_c = -\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{23}$$

essendo

$$a_i \in L_\infty(\Omega) \ (i = 1, 2, 3), \qquad a_1 = \mu_1 - a_3, \qquad a_2 = \mu_2 - a_3, \qquad a_3 \geq 1 \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \geq (1 + \eta^{-1}) \|a_3\|_{L_\infty(\Omega)} + 1, \ \mu_2 \geq (1 + \eta) \|a_3\|_{L_\infty(\Omega)} + 1, \\ \mu_1, \mu_2, \eta \text{ costanti positive.} \end{cases} \tag{25}$$

Si suppone che Ω sia il cubo $(0, 1)^3$ e si dimostra che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L_c u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{26}$$

ha una ed una sola soluzione, comunque sia data f in $L_2(\Omega)$. A tale proposito F. Guglielmino [6] ha osservato quanto segue. Ferme restando le (24), supponiamo, in luogo delle (25), che

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} a_3 \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} a_3 < \mu_2 \leq \mu_1 \tag{25'}$$

(Ovviamente le (25') sono meno restrittive delle (25)). Allora, scambiando x_2 con x_3 (e quindi a_2 con a_3) si ottiene

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \frac{|a_1 - a_3|}{a_1 + a_2} + \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \frac{|a_2 - a_3|}{a_1 + a_2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} + \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \frac{|\mu_2 - 2a_3|}{\mu_1} < 1$$

pertanto l'equazione di Canfora è un caso particolare di quella di Iftimie. Applicando i risultati precedenti, si ottiene così esistenza ed unicità della soluzione del problema (26) non soltanto nel caso in cui Ω sia un cubo, ma nelle più generali ipotesi viste in precedenza per l'equazione di Iftimie.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Canfora, *Su di un'equazione ellittica in tre variabili non verificante la condizione di Cordes,* Methods of Functional Analysis and Theory of Elliptic Equations (Proceedings of a meeting held in Naples, September 13-16, 1982), 333-342.

[2] M. Chicco, *Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) 4 (1971), 374-387.

[3] M. Chicco, *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 100 (1974), 239-258.
[4] M. Chicco, *Osservazioni sulla risolubilità del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 66 (1982), 137-141.
[5] M. Chicco, *Su una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale,* Boll. Un. Mat. Ital. (6) 4A (1985), 479-486.
[6] F. Guglielmino, *comunicazione privata.*
[7] V. Iftimie, *Sur le problème de Dirichlet pour des équations aux coefficients mésurables,* Rev. Roum. Math. Pures Appl. 13 (1968), 1353-1360.
[8] J. Kadlec, *The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain,* Czechoslovak Math. J. 14 (89) (1964), 386-393.
[9] C. B. Morrey Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer Verlag, Berlin (1966).

Pervenuto alla Redazione il 7 aprile 1986