Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. - *We prove a strong maximum principle for positive subsolutions of second order elliptic partial differential equations in divergence form.*

Notazioni e premesse.

Le seguenti ipotesi saranno fatte costantemente nel seguito, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n; siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_n(\Omega)$, $c \in L_{n/2}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \nu \,|\, \lambda \,|^2$ con ν costante positiva, $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} \geq 0$ nel senso delle distribuzioni,

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx$$

$$a'(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v \right\} dx.$$

Sia $C^1(\overline{\Omega})$ lo spazio delle funzioni continue colle derivate prime nella chiusura di Ω, $C_0^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ a supporto compatto contenuto in Ω, $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ i completamenti rispettivamente di $C^1(\overline{\Omega})$ e di $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \| u \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \| u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)} .$$

Dato un numero reale k, si dice che $u \leq k$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $u_j \leq k$ su $\partial\Omega$ (per ogni j) e $\lim_{j\to\infty} \| u - u_j \|_{H^1(\Omega)} = 0$. Si definisce poi il massimo di u su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ nel modo seguente:

$$\max_{\partial\Omega}{}^* u = \inf \{ k : u \leq k \quad \text{su } \partial\Omega \text{ nel senso di } H^1(\Omega) \}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La forma $a(u, v)$ si dice coercitiva su $\overset{1}{H}_0(\Omega)$ se esiste una costante positiva h tale che

$$a(v, v) \geq h \| v \|^2_{\overset{1}{H}_0(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad v \in \overset{1}{H}_0(\Omega).$$

G. STAMPACCHIA ha dimostrato i teoremi seguenti (vedi [1], teoremi 3.6 e 7.1):

TEOREMA 1. - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in \overset{1}{H}_0(\Omega)$, $v \geq 0$. *Valga inoltre almeno una delle seguenti ipotesi:*

1) — *la forma* $a(u, v)$ *è coercitiva su* $\overset{1}{H}_2(\Omega)$

2) — *risulta* $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq c_0$ *nel senso delle distribuzioni, ove* c_0 *è una costante positiva.*

Allora si ha

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \max (0, \max_{\partial\Omega}{}^* u).$$

TEOREMA 1'. - *Sia* $w \in H^1(\Omega)$, $a'(w, v) = 0$ *per ogni* $v \in \overset{1}{H}_0(\Omega)$. *Allora se* w *assume il suo massimo in un punto interno ad* Ω, w *è costante in* Ω.

(La tesi ha senso perchè, nelle ipotesi del teorema, la funzione w si può supporre continua in Ω: vedi [1], teorema 7.1).

Scopo del presente lavoro è dimostrare un risultato analogo alla tesi del teorema 1' per le soluzioni positive della disequazione

$$a(u, v) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in \overset{1}{H}_0(\Omega), \qquad v \geq 0.$$

In tal modo il teorema 1 resta provato anche senza le ipotesi 1) e 2).

Ciò viene fatto nel teorema 2.

Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 1. - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u = M$. *Un punto* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *si dice punto di massimo per* u *se per ogni intorno aperto* U *di* x_0 *risulta*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{U \cap \Omega} u = M.$$

OSSERVAZIONE. - È facile verificare che esiste in $\overline{\Omega}$ almeno un punto di massimo per u secondo la definizione precedente.

LEMMA. - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $u \geq 0$ *quasi ovunque in* Ω, $a(u, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in \overset{1}{H}_0(\Omega)$, $v \geq 0$. *Sia* A *un aperto contenuto in* Ω *e tale* *che la forma $a(u, v)$ sia coercitiva su $H^1_0(A)$. Sia z_A la soluzione del problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} a'(z_A, v) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad v \in H^1_0(A) \\ z_A - u \in H^1_0(A). \end{cases}$$

Allora risulta $u \leq z_A$ quasi ovunque in A.

DIMOSTRAZIONE. - Posto $\bar{u} = \max(u - z_A, 0)$, risulta $\bar{u} \in H^1_0(A)$, $\bar{u} \geq 0$ in A e quindi, con facili calcoli:

$$0 \geq a(u, \bar{u}) - a'(z_A, \bar{u}) =$$

$$= \int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u - z_A)_{x_i} \bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(u - z_A)_{x_i}\bar{u} + \left[c - \sum_{i=1}^{n}(d_i)_{x_i}\right] u\bar{u} \right\} dx \geq$$

$$\geq \int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{u}_{x_i}\bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{u}_{x_i}\bar{u} \right\} dx \geq \text{cost.} \, \|\bar{u}\|^2_{H^1_0(A)}.$$

Ciò prova che $\bar{u} = 0$ q.o. in A, cioè che $u \leq z_A$ q.o. in A, c.v.d.

TEOREMA 2. - *Sia $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$, $v \geq 0$; $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u = M$, $0 < M < +\infty$.*

Allora vale una ed una sola delle seguenti alternative:

1) *I punti di massimo di u (nel senso della definizione 1) sono tutti sulla frontiera di Ω.*

2) *$u = M$ quasi ovunque in Ω, $c - \sum_{i=1}^{n}(d_i)_{x_i} = 0$ nel senso delle distribuzioni, $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Non è restrittivo supporre che sia $u \geq 0$, poichè in caso contrario si ragiona sulla funzione $\max(u, 0)$.

Supponiamo che esista un punto x_0 di massimo per u interno ad Ω e facciamo vedere che vale l'alternativa 2. Sia S una sfera di centro x_0 e di raggio r_0 abbastanza piccolo in modo che S sia contenuta in Ω e che la forma $a'(u, v)$ sia coercitiva su $H^1_0(S)$ (teorema 3.1 di [1]).

La soluzione z_S del problema di DIRICHLET

$$a'(z_S, v) = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H^1_0(S) \tag{1}$$

$$z_S - u \in H^1_0(S) \tag{2}$$

esiste unica (teorema 3.3 di [1]) e si può supporre continua in S (teorema 7.1 di [1]). Per il lemma precedente risulta

$$u \leq z_S \quad \text{quasi ovunque in} \quad S. \tag{3}$$

Poichè $u \leq M$ q.o. in Ω, si ha (per regolarizzazione)

$$\max_{\partial S}{}^* u \leq M \tag{4}$$

ove « max* » indica il massimo nel senso di $H^1(\Omega)$.

Inoltre per il principio di massimo debole (teorema 3.6 di [1])

$$M \leq \max_{\partial S}{}^* u. \tag{5}$$

Dalle (2), (4), (5) si ricava

$$\max_{\partial S}{}^* z_S = M \tag{6}$$

e per il teorema 1 vale una ed una sola delle seguenti alternative:

$$z_S < M \quad \text{in} \quad S \tag{7}$$

$$z_S = M \quad \text{in} \quad S. \tag{8}$$

Facciamo vedere che la (7) non può verificarsi. Infatti, sia U un qualunque aperto tale che $x_0 \in U$ e $\overline{U} \subset S$; per la (7) e per la continuità di z_S risulta

$$\operatorname*{ess\,sup}_U z_S < M \tag{9}$$

e poichè x_0 è punto di massimo per u:

$$\operatorname*{ess\,sup}_U u = M. \tag{10}$$

Le (9), (10) sono in contrasto con la (3) ed è quindi assurdo che valga la (7). Si verifica quindi la (8) la quale, insieme alla (2), implica

$$u = M \quad \text{su} \quad \partial S \quad (\text{nel senso di} \quad H^1(\Omega)). \tag{11}$$

Poichè tutto si può ripetere per le sfere $S(x_0, r)$ con $r < r_0$, ne viene

$$u = M \quad \text{quasi ovunque in} \quad S. \tag{12}$$

(Ciò si dimostra facilmente per assurdo applicando il teorema di Egoroff ad una successione $v_j \in C^1(\overline{\Omega})$ convergente ad u in $H^1(\Omega)$).

Come subito si verifica, la (12) basta per concludere che $u = M$ quasi ovunque in Ω, ed in tal caso è ovviamente $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} = 0$ nel senso delle distribuzioni e $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in \overset{1}{H}_0(\Omega)$.

c.v.d.

Il teorema 2 si può estendere al caso in cui $\operatorname{ess\,sup} u = +\infty$ nel modo seguente:

COROLLARIO. - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in \overset{1}{H}_0(\Omega)$, $v \geq 0$; $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u = +\infty$.

Allora i punti di massimo per u (nel senso della definizione 1) *sono sulla frontiera di* Ω.

DIMOSTRAZIONE. - Si può ragionare per assurdo ripetendo la dimostrazione del teorema precedente, oppure applicare il teorema 5.1 di [1] che fornisce immediatamente la tesi. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 15, 1 (1965), pag. 189-258.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 27 maggio 1967