Bollettino U. M. I.
(4) **11**, Suppl. fasc. 3 (1975), 100-109

Principio di massimo forte per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. – *In an open bounded connected set Ω, a mixed boundary value problem for a linear second order elliptic partial differential equation in divergence form is considered. It is proven that, if the solution u is not a constant, u assumes its maximum value only in points of $\partial\Omega$ where the Dirichlet condition is assigned.*

1. – Introduzione.

Il presente lavoro è una continuazione di [2] ove era dato un principio di massimo (debole) per le soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni differenziali alle derivate parziali lineari ellittiche del secondo ordine in forma variazionale e a coefficienti discontinui.

Dato un insieme aperto limitato e connesso Ω in R^n, il problema misto di cui trattiamo si può formalmente enunciare come segue:

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu \equiv -\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i} + d_j u\Big)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \leqslant 0 & \text{in } \Omega, \\ u = w \quad \text{su } \Gamma_0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}N_j + fu \leqslant 0 & \text{su } \Gamma_1, \end{cases}$$

ove $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, Γ_0 è chiuso, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, N è il versore della normale a $\partial\Omega$ orientata verso l'esterno. In [2] si è provato che l'estremo superiore essenziale di u in Ω si maggiora, se positivo, col massimo di u su Γ_0, oppure u è costante in Ω. Nel presente lavoro si dimostra più precisamente che, se u non è costante in Ω e se l'estremo superiore essenziale di u è positivo, allora i punti di massimo essenziale

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di Studio per la Matematica e la Fisica Teorica » del C.N.R., Genova.

di u si trovano soltanto su Γ_0. I coefficienti che definiscono l'operatore L non si suppongono regolari, pertanto conviene impostare il problema (1) in forma debole. Se invece i coefficienti sono così regolari che l'operatore L si possa esprimere anche in forma classica (non variazionale), allora si ritrovano risultati noti (vedi ad esempio [7], [8], ...).

2. – Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n; supponiamo per semplicità $n \geqslant 3$. (I risultati sono validi anche per $n = 2$ pur di modificare qualche esponente di sommabilità negli spazi funzionali considerati).

Siano $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ gli spazi di Hilbert sui reali ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)} .$$

Sia Γ_0 una parte chiusa di $\partial\Omega$ (eventualmente vuota) e sia $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Supponiamo che Γ_1 sia rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^1. Sia V il sottospazio di $H^1(\Omega)$ così definito:

$$V = \text{chiusura in } H^1(\Omega) \text{ di } \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : \; v = 0 \text{ su } \Gamma_0\} .$$

Siano $p > n$, $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_{p/2}(\Omega)$, c_0 una costante positiva, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geqslant c_0 |t|^2$ per ogni $t \in R^n$ e quasi ovunque in Ω, $g \in L_{n-1}(\Gamma_1)$.

Supponiamo che risulti

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_{x_i} + c\varphi \Big) dx + \int_{\Gamma_1} g\varphi \, d\sigma \geqslant 0 \tag{2}$$

per ogni $\varphi \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\varphi \geqslant 0$ in $\bar{\Omega}$. Sia infine

$$a(u, v) \equiv \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + \sum_{i=1}^{n} d_i u v_{x_i} + cuv \Big\} dx + \int_{\Gamma_1} guv \, d\sigma .$$

Come in [2] si può verificare che $a(\cdot,\cdot)$ è una forma bilineare su $V \times V$ e se $u \in H^1(\Omega)$, $\max_{\Gamma_0}^* |u| < +\infty$, allora $a(u, \cdot)$ è un elemento del duale di V. (Per la definizione di $\max^*_{\Gamma_0}$ si veda ad esempio [2], [6], [9]).

In seguito sarà opportuno considerare anche le seguenti forme bilineari, che sono casi particolari della $a(\cdot,\cdot)$:

$$a_1(u, v) \equiv \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v + \sum_{i=1}^n d_i u v_{x_i} + cuv \Big\} dx$$

$$a_2(u, v) \equiv \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i) u_{x_i} v \Big\} dx .$$

Sia ora $w \in H^1(\Omega)$ ed u tale che

$$(3) \qquad \begin{cases} a(u, v) \leqslant 0 & \forall v \in V \in C^1(\bar\Omega),\ v \geqslant 0 , \\ u - w \in V . \end{cases}$$

Mostriamo che le (3) traducono in forma debole le (1), nel senso che se i coefficienti finora introdotti sono funzioni abbastanza regolari, una soluzione delle (1) è soluzione pure delle (3). Scelta una qualunque funzione $v \geqslant 0$, $v \in V \cap C^1(\bar\Omega)$, dalle (1), dal teorema della divergenza e dalle posizioni fatte si ha:

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \Big\} dx + \int_{\Gamma_1} guv \, d\sigma =$$
$$= \int_\Omega (Lu) v \, dx + \int_{\Gamma_1} \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} N_j - \sum_{i=1}^n d_i N_i u + gu \Big) v \, d\sigma \leqslant 0$$

pur di supporre che $g = f - \sum_{i=1}^n d_i N_i$ quasi ovunque su Γ_1.

3. – Risultati.

Teorema 1. – *Sia $u \in H^1(\Omega)$, $u \geqslant 0$ quasi ovunque in Ω,*

$$a_1(u, v) \equiv \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \Big\} dx = 0$$

per ogni $v \in V \cap C^1(\bar\Omega)$, D un aperto contenuto in Ω tale che $\bar D \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Allora esiste una costante positiva K_1 dipendente da n, D, Ω e dai *coefficienti di* $a_1(\cdot,\cdot)$ *tale che*

$$\mathrm{ess}_D \sup u \leqslant K_1 \,\mathrm{ess}_D \inf u\,.$$

Se $\Gamma_0 = \emptyset$, prendendo $D = \Omega$ nel teorema precedente si ottiene il

COROLLARIO. – *Sia* $u \in H^1(\Omega)$ $u \geqslant 0$ *quasi ovunque in* Ω, $a_1(u, v) = 0$ *per ogni* $v \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mathrm{ess}_\Omega \inf u = 0$. *Allora è* $u = 0$ *quasi ovunque in* Ω.

Questo risultato è ben noto nel caso classico, dal momento che la derivata normale di una soluzione non costante e regolare di un'equazione ellittica del secondo ordine è strettamente negativa nei punti della frontiera di Ω nei quali u assume il valore minimo strettamente positivo (vedi ad esempio [7], [8]).

TEOREMA 2. – *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $\mathrm{ess}_\Omega \sup u > 0$, $a(u, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$. *Allora è soddisfatta una ed una sola delle seguenti alternative:*

1) u *è una costante positiva in* Ω;

2) *i punti di estremo superiore essenziale di* u *si trovano soltanto su* Γ_0.

L'alternativa 1) *si può verificare soltanto se risulta*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n d_i \varphi_{x_i} + c\varphi\Big)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\varphi \, d\sigma = 0 \qquad \textit{per ogni } \varphi \in V \cap C^1(\bar{\Omega})\,.$$

4. – Dimostrazioni.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. – Per la compattezza di $\bar{D}$ basta evidentemente provare quanto segue: per ogni punto $x_0 \in \bar{D}$ esistono una sfera S (aperta) di centro x_0 ed una costante K_2 dipendente da x_0, n, Ω, D e dai coefficienti di $a_1(\cdot,\cdot)$ tale che risulti

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D\cap S} u \leqslant K_2 \operatorname*{ess\,inf}_{D\cap S} u\,. \tag{4}$$

(Poichè $\bar{D}$ si può ricoprire con un numero finito di tali sfere, da ciò seguirà facilmente la tesi). Se $x_0 \in \bar{D} \cap \Omega$ basta prendere una qualunque sfera S, di centro x_0, contenuta in Ω colla sua chiusura e la (4) è provata per i risultati di [9] (pag. 237).

Resta soltanto da considerare il caso in cui $x_0 \in \bar{D} \cap \Gamma_1$.

Si può allora supporre intanto che S' sia una sfera di centro x_0 e di raggio tanto piccolo che la superficie $\Gamma_1 \cap S'$ sia rappresentabile con una equazione del tipo $x_n = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, essendo ψ una funzione di classe C^1. Con una scelta opportuna degli assi ortogonali $x_1, \ldots, x_n$ si può altresì fare in modo che risulti

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_0) = 0 \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Consideriamo il cambiamento di variabili

$$\left\{\begin{array}{ll} y_j = x_j & (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\ y_n = x_n - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \end{array}\right. \tag{5}$$

che trasforma l'aperto $S' \cap \Omega$ in un sottoinsieme U_1 del semispazio $\{y: y_n < 0\}$ ed il compatto $\overline{S' \cap \Gamma_1}$ in un sottoinsieme compatto di $\{y: y_n = 0\}$. Analogamente, se S è una sfera di centro x_0 contenuta in S' colla sua chiusura, il cambiamento di variabile (5) trasforma l'aperto $S \cap \Omega$ in un sottoinsieme W_1 del semispazio $\{y: y_n < 0\}$ ed il compatto $\overline{S \cap \Gamma_1}$ in un sottoinsieme compatto di $\{y: y_n = 0\}$. L'equazione $a_1(u, v) = 0$ per ogni $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, e quindi $a_1(u, v) = 0$ per ogni $v \in C^1(\overline{S' \cap \Omega})$, $v = 0$ su $\overline{\partial S' \cap \Omega}$, implica la validità di una analoga equazione in U_1, del tipo

$$\int_{U_1}\left\{\sum_{h,k=1}^{n}\alpha_{hk}\frac{\partial\xi}{\partial y_h}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k\frac{\partial\xi}{\partial y_k}\varphi + \delta_k\xi\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right) + \gamma\xi\varphi\right\}dy = 0 \tag{6}$$

per ogni $\varphi \in C^1(\bar{U}_1)$, $\varphi = 0$ su $\partial U_1 \setminus \{y: y_n = 0\}$, essendo

$$\xi(y) = u[x(y)], \qquad \alpha_{hk}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[x(y)]\frac{\partial y_h}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j},$$

$$\beta_k(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i[x(y)]\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \qquad \delta_k(y) = \sum_{i=1}^{n} d_i[x(y)]\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \qquad \gamma(y) = c[x(y)]$$

$(h, k = 1, 2, \ldots, n)$. Si osservi inoltre che risulta

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1 \quad \text{in } U_1 .$$

Scegliendo opportunamente il raggio della sfera S', si può fare in modo che il numero

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n-1}\ \max\left\{\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)\right| : x \in \overline{S' \cap \Omega}\right\}$$

sia arbitrariamente piccolo. Segue allora dalle (5), (6) che si può supporre l'esistenza di una costante positiva γ_0 tale che $\sum_{h,k=1}^{n} \alpha_{hk} t_h t_k \geqslant \gamma_0 |t|^2$ per ogni $t \in R^n$ e quasi ovunque in U_1. Consideriamo l'aperto U_2 simmetrico di U_1 rispetto all'iperpiano $\{y: y_n = 0\}$:

$$U_2 = \{y \in R^n: (y_1, y_2, \ldots, -y_n) \in U_1\}$$

e indichiamo con U l'aperto:

$$U = \text{interno di } \overline{U_1 \cup U_2}\,.$$

In modo analogo, detto W_2 il simmetrico di W_1 rispetto all'iperpiano $\{y: y_n = 0\}$, cioè

$$W_2 = \{y \in R^n: (y_1, y_2, \ldots, -y_n) \in W_1\}$$

indichiamo con W l'aperto

$$W = \text{interno di } \overline{W_1 \cup W_2}\,.$$

Evidentemente dalla definizione di W_1 segue

$$\overline{W} \subset U\,. \tag{7}$$

Prolunghiamo ora i coefficienti della (6) a tutto U nel modo seguente:

$$\tag{8} \begin{cases} \alpha_{hk}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \alpha_{hk}(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \text{se } h, k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ & \text{e se } \quad h = k = n \\ \alpha_{hk}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -\alpha_{hk}(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \text{se } \begin{cases} h = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = n \end{cases} \\ & \text{e se } \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ h = n \end{cases} \\ \beta_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \beta_k(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \text{se } \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \beta_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -\beta_n(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \\ \delta_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \delta_k(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \text{se } \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \delta_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -\delta_n(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \\ \gamma\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \gamma\,(y_1, y_2, \ldots, -y_n) & \end{cases}$$

per quasi ogni $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U_2$. Poichè i coefficienti della forma bilineare (6) sono definiti quasi ovunque in U_1, le (8) effettivamente prolungano la definizione quasi ovunque in U_2 e quindi quasi ovunque in U.

Inoltre, indicando colle stesse lettere le funzioni così prolungate, evidentemente risulta

$$\tag{9} \begin{cases} \alpha_{hk} \in L_\infty(U)\,, \quad \beta_k \in L_n(U)\,, \quad \delta_k \in L_p(U) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)\,, \\ \gamma \in L_{p/2}(U)\,, \quad \sum_{h,k=1}^{n} \alpha_{hk} t_h t_k \geqslant \gamma_0 |t|^2 \quad \forall t \in R^n \qquad \text{q.o. in } U\,. \end{cases}$$

Prolunghiamo poi la funzione ξ in U nel modo seguente:

$$\tag{10} \xi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \xi(y_1, y_2, \ldots, -y_n)$$

per quasi ogni $y \in U_2$. La funzione ξ così prolungata appartiene ad $H^1(U)$, come si può facilmente verificare dopo aver osservato che, essendo $u \in H^1(\Omega)$ ed il cambiamento di variabile (5) di classe C^1, risulta $\xi \in H^1(U_1)$. Dalla (10) si ottiene poi

$$\tag{11} \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial y_i}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \dfrac{\partial \xi}{\partial y_i}(y_1, y_2, \ldots, -y_n) \quad \text{se } i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -\dfrac{\partial \xi}{\partial y_n}(y_1, y_2, \ldots, -y_n)\,. \end{cases}$$

Sia ora $w \in C_0^1(U)$; dalle (6), (8), (9), (10), (11) si deduce

$$\tag{12} \begin{aligned} &\int_U \left\{ \sum_{k,h=1}^{n} \alpha_{hk} \frac{\partial \xi}{\partial y_h} \frac{\partial w}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^{n} \left(\beta_h \frac{\partial \xi}{\partial y_h} w + \delta_h \frac{\partial w}{\partial y_h} \right) + \gamma \xi w \right\} dy = \\ &= \int_{U_1} \left\{ \sum_{h,k=1}^{n} \alpha_{hk} \frac{\partial \xi}{\partial y_h} \frac{\partial w}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^{n} \left(\beta_h \frac{\partial \xi}{\partial y_h} w + \delta_h \frac{\partial w}{\partial y_h} \right) + \gamma \xi w \right\} dy + \\ &+ \int_{U_1} \left\{ \sum_{h,k=1}^{n} \alpha_{hk} \frac{\partial \xi}{\partial y_h} \frac{\partial w^*}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^{n} \left(\beta_h \frac{\partial \xi}{\partial y_h} w^* + \delta_h \xi \frac{\partial w^*}{\partial y_h} \right) + \gamma \xi w^* \right\} dy = 0 \end{aligned}$$

essendo w^* la funzione così definita:

$$w^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w(y_1, y_2, \ldots, -y_n) \qquad \text{per ogni } y \in U_1\,.$$

La (12) implica che si possono applicare ad U i risultati di [9] (teor. 8.1 pag. 237); tenendo conto anche della (7) ne segue l'esistenza di una costante K_3 dipendente da U, W e dai coefficienti della (6) tale che

$$\max_{\overline{W}} \xi \leqslant K_3 \min_{\overline{W}} \xi .$$

Dalle definizioni di ξ e di W segue allora

$$\max_{\overline{S \cap \Omega}} u \leqslant K_3 \min_{\overline{S \cap \Omega}} u$$

da cui subito

$$\max_{\overline{S \cap D}} u \leqslant K_3 \min_{\overline{S \cap D}} u .$$

OSSERVAZIONE. – Dalla dimostrazione precedente, ed in particolare dalla (12), si potrebbe facilmente dedurre che la funzione u risulta hölderiana in $\overline{D}$ (si tengano presenti i risultati di [9]).

Non ci soffermiamo su questo punto, anche perchè tale risultato è noto: vedi [5].

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. – Facciamo vedere che se esiste in Γ_1 un punto x_0 di estremo superiore essenziale positivo per u, allora u è una costante positiva in Ω. Osserviamo intanto che si può supporre $u \geqslant 0$ quasi ovunque in Ω, perchè in caso contrario si può ragionare sulla funzione max $(u, 0)$ la quale soddisfa ancora alle ipotesi del teorema (vedi [2] lemma 4, [9] teorema 3.5). Risulta allora

$$a_2(u, v) \equiv \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i) u_{x_i} v \Big\} dx \leqslant$$

$$\leqslant - \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n d_i (uv)_{x_i} + cuv \Big] dx - \int_{\Gamma_1} guv \, d\sigma \leqslant 0$$

per ogni $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v \geqslant 0$ in Ω.

A questo punto distinguiamo due casi. Se è contemporaneamente Γ_0 (o anche $\mathrm{cap}_\Omega \Gamma_0 = 0$: vedi [2], [3]) e

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n d_i \varphi_{x_i} + c\varphi \Big) dx + \int_{\Gamma_1} g\varphi \, d\sigma = 0 \qquad \forall \varphi \in V \cap C^1(\overline{\Omega}) ,$$

allora dai risultati di [2] (teorema 1 ed osservazione ad esso seguente) segue che u è una costante positiva in Ω.

Supponiamo ora che sia vera almeno una delle seguenti condizioni: $\mathrm{cap}_\Omega \Gamma_0 > 0$ oppure

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n d_i \varphi_{x_i} + c\varphi\Big)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\varphi\, d\sigma \neq 0$$

per qualche $\varphi \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$. In tal caso sia S una sfera aperta di centro x_0 e raggio tale che $\overline{S \cap \Gamma_0} = \emptyset$.

Consideriamo il problema al contorno

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} a_2(w, v) = 0 & \forall v \in C^1(\overline{S \cap \Omega}) \;\; v = 0 \text{ su } \overline{\partial S \cap \Omega}\,, \\ w \in H^1(S \cap \Omega)\,, & w = u \text{ su } \overline{\partial S \cap \Omega}\,. \end{cases}$$

(L'ultima uguaglianza va intesa « nel senso di $H^1(S \cap \Omega)$ »: si veda ad esempio [3], [6], [9], ...). Il problema (13) ammette una ed una sola soluzione w per i risultati di [2] (teorema 2).

Inoltre, posto $M = \mathrm{ess}_\Omega \sup u$, sempre per i risultati di [2] (teorema 1) risulta $u \leqslant w \leqslant M$ quasi ovunque in $S \cap \Omega$. Essendo x_0 punto di estremo superiore essenziale per u, ne segue immediatamente che x_0 è punto di estremo superiore essenziale anche per w. Escludiamo che sia $M = +\infty$ nel modo seguente. Applichiamo il teorema 1 alla funzione w, alla forma bilineare $a_2(\cdot,\cdot)$, all'insieme $D = S_1 \cap \Omega$, essendo S_1 una sfera con $x_0 \in S_1 \subset \bar{S}_1 \subset S$.

Segue allora dal teorema 1

$$M = \operatorname*{ess\,sup}_{S_1 \cap \Omega} w \leqslant K_1 \operatorname*{ess\,inf}_{S_1 \cap \Omega} w\,.$$

Quindi M è reale. Si ha poi $a_2(M - w, v) = 0$ per ogni $v \in C^1(\overline{S \cap \Omega})$, $v = 0$ su $\overline{\partial S \cap \Omega}$; allora applicando nuovamente il teorema 1 con $D = S_1 \cap \Omega$ si ottiene

$$\operatorname*{ess\,sup}_{S_1 \cap \Omega} (M - w) \leqslant K_1 \operatorname*{ess\,inf}_{S_1 \cap \Omega} (M - w) = 0\,.$$

Pertanto è $w = M$ quasi ovunque in $S_1 \cap \Omega$ e dalla arbitrarietà di S_1 segue $w = M$ quasi ovunque in $S \cap \Omega$, da cui ancora $w = M$ su $\overline{\partial S \cap \Omega}$ nel senso di $H^1(S \cap \Omega)$. (A questo proposito si veda [3], [4]). Per le (13) si ha allora $u = M$ su $\overline{\partial S \cap \Omega}$ (nel senso di $H^1(S \cap \Omega)$). Ciò basta per concludere che $u = M$ quasi ovunque in Ω, in quanto se così non fosse sarebbe $\mathrm{ess}_B \sup u < M$ per ogni compatto B contenuto in Ω (vedi ad esempio [1]), ma ciò è in contrasto col fatto che $u = M$ su $\overline{\partial S \cap \Omega}$ nel senso di $H^1(S \cap \Omega)$ (si veda anche [3]). Pertanto anche in questo caso $u =$ costante positiva in Ω.

OSSERVAZIONE. – Come risulta dalla dimostrazione, il teorema 1 e il corollario valgono anche senza l'ipotesi (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) **22** (1967), pp. 368-372.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **3** (1970), pp. 384-394.

[3] M. CHICCO, *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **4** (1971), pp. 668-676.

[4] M. CHICCO, *Sulle disuguaglianze negli spazi* $H^{k,p}(\Omega)$, Matematiche (Catania), **28** (1973), pp. 18-29.

[5] R. FIORENZA, *Sulla hölderianità delle soluzioni dei problemi di derivata obliqua regolare del secondo ordine*, Ricerche Mat., **14** (1965), pp. 102-123.

[6] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - G. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17** (1963), pp. 43-77.

[7] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall Publ., 1967.

[8] C. PUCCI, *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8) **23** (1957), pp. 370-375 e (8) **24** (1958), pp. 3-6.

[9] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1967), pp. 189-258.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 19 luglio 1974