Bollettino U. M. I.
(6) 4-A (1985), 479-486

Su una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale.

MAURIZIO CHICCO (*)

Summary. – *Let L be a linear second order uniformly elliptic partial differential operator in non-divergence form. I prove that the Dirichlet problem*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{a.e. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(with f given in $L_2(\Omega)$) has one and only one solution, provided the main coefficients a_{ij} of L have some distributional derivative in $L_n(\Omega)$, without necessarily belonging to $H^{1,n}(\Omega)$.

1. – Introduzione.

In un aperto limitato Ω, contenuto in $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$, si considerano l'operatore uniformemente ellittico

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1}$$

e il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

con f dato in $L_2(\Omega)$. Come è noto, se i coefficienti a_{ij} si suppongono soltanto misurabili e limitati, non è detto che il problema (2) abbia una ed una sola soluzione, neppure facendo opportune ipotesi sui coefficienti b_i, c di L (vedi ad esempio [12] pag. 18-19). Occorre pertanto supporre i coefficienti a_{ij} continui in $\overline{\Omega}$ (Koshelev [11], Chicco [4]), oppure soddisfacenti altre condizioni: vedi ad esempio

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale ed Applicazioni del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Cordes [7], Chicco [3], Miranda [13], [14], Iftimie [10], Franciosi-Fusco [8], Sharovskii [15], Viola [17], Brezis-Evans [2], Chicco [6], ecc. Noi ci limitiamo per semplicità a considerare l'ordine di idee introdotto da Miranda in [13] e proseguito da Franciosi-Fusco in [8] e da Viola in [17]. Precisamente, Miranda supponeva i coefficienti a_{ij} appartenenti da $H^{1,n}(\Omega)$ per $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (oltre che, come si è detto, essenzialmente limitati). Tale ipotesi viene attenuata in [8] dove si suppone $\partial a_{ij}/\partial x_h \in L_n(\Omega)$ (nel senso delle distribuzioni) per $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ma solo per $h = 1, 2, \ldots, n-1$, e in [17] dove si suppone $a_{ij} \in H^{1,n}(\Omega)$ per $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. Tenendo conto che in tutti i lavori qui considerati si fa altresì l'ipotesi di simmetria ($a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j = 1, 2, \ldots, n$), si può rilevare che Miranda [13] suppone complessivamente l'esistenza di $n^2(n+1)/2$ derivate (nel senso delle distribuzioni) appartenenti ad $L_n(\Omega)$ per le funzioni a_{ij}; Franciosi-Fusco [8] riducono tale numero a $n(n^2-1)/2$ e Viola [17] a $n^2(n-1)/2$. Quindi, anche se il risultato di [8] e quello di [17] non sono confrontabili perchè le funzioni supposte derivabili sono nei due casi diverse, si può dire che il risultato di [17] è «migliore» di quello di [8], nel senso che richiede l'appartenenza ad $L_n(\Omega)$ di meno derivate dei coefficienti a_{ij}. Si osservi ancora che tutti e tre i risultati suddetti ([13], [8], [17]) richiedono un numero di derivate (per i coefficienti a_{ij}) dell'ordine di $n^3/2$. Scopo della presente nota è «migliorare» i risultati precedenti, nello stesso ordine di idee, dimostrando che il problema di Dirichlet (2) ha una ed una sola soluzione (in opportune ipotesi sui coefficienti b_i, c) non appena si supponga che i coefficienti a_{ij} abbiano certe derivate (nel senso delle distribuzioni) appartenenti ad $L_n(\Omega)$, ove il numero di tali derivate è $(n(n-1)(n+4))/6 - 1$, quindi dell'ordine di $n^3/6$.

2. – Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\boldsymbol{R}^n$ con $n \geqslant 3$ e frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ed esistano due costanti positive μ, ν tali che

$$\nu|t|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \leqslant \mu |t|^2$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}^n$, q.o. in Ω. Siano poi $b_i \in L_n(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e $c \in L_p(\Omega)$ con $p = 2$ se $n = 3$, $p > 2$ se $n = 4$, $p = n/2$ se $n \geqslant 5$. Siano $H^{1,q}(\Omega)$, $H_0^{1,q}(\Omega)$ gli spazi di Banach sui reali ottenuti completando rispettivamente $C^\infty(\bar{\Omega})$, $C_0^\infty(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{1,q}(\Omega)} = \|u\|_{L_q(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_q(\Omega)} ;$$

sia $H^{2,q}(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^2(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{2,q}(\Omega)} = \|u\|_{L_q(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|u_{x_i x_j}\|_{L_q(\Omega)} .$$

Indicheremo per brevità $H^{1,2}(\Omega)$, $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{2,2}(\Omega)$ rispettivamente con $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ (questi sono spazi di Hilbert).

Poniamo poi

$$u_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2} , \qquad u_{xx} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2} .$$

È noto che in $H_0^1(\Omega)$ la quantità $\|u_x\|_{L_2(\Omega)}$ è una norma equivalente a $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, mentre in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la quantità $\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}$ è una norma equivalente a $\|u\|_{H^2(\Omega)}$. Per ulteriori notizie sugli spazi di Sobolev si veda ad esempio [9], [12].

Indichiamo infine con δ_{ij} il simbolo di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j , \\ 0 & \text{se } i \neq j . \end{cases}$$

3. – Risultati.

TEOREMA. – *Oltre alle ipotesi enunciate in precedenza, supponiamo che risulti* $(a_{ij})_{x_k} \in L_n(\Omega)$ *nel senso delle distribuzioni, per ogni* i, j, k *con* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, $j \leqslant k \leqslant n$. *Allora esistono due costanti* K_1 *e* λ_0, *dipendenti dai coefficienti di* L *e da* Ω, *tali che risulti*

$$\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K_1 \{ \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \} \tag{3}$$

per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$ *e ogni* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Come in [17], non è restrittivo dimostrare la tesi (3) per l'operatore L_0 in luogo di L, ove

$$L_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} .$$

Allo stesso modo non è restrittivo supporre che la funzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sia moltiplicata per una opportuna funzione $\alpha \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. Cominciamo anzi a supporre $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ e dimostriamo per induzione la seguente proprietà:

(P) « esistono due costanti positive K_2 e $\bar{\lambda}$, dipendenti solo da μ, ν, tali che risulti

$$(4)\qquad \|(\alpha u)_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant K_2 \Big\{ \|L_0(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=3}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} (2-\delta_{ij}) \cdot \int_\Omega |(\alpha u)_{x_k}[(a_{ij})_{x_k}(\alpha u)_{x_i x_j} - (a_{ij})_{x_j}(\alpha u)_{x_i x_k}]|\, dx \Big\},$$

per ogni $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$ e ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ».

È chiaro che, una volta provata la proprietà (P), si deduce facilmente da essa la tesi, infatti (vedi ancora [17]) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante K_ε (dipendente, oltre che da ε, dalle derivate $(a_{ij})_{x_r}$ purchè appartenenti ad $L_n(\Omega)$) per cui

$$(5)\qquad \int_\Omega |(a_{ij})_{x_r} u_{x_s} u_{x_h x_k}|\, dx \leqslant \varepsilon \|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} + K_\varepsilon \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Dalle (4), (5) nonchè dalle ipotesi fatte sulla derivabilità dei coefficienti a_{ij}, segue la (3).

La proprietà (P) è vera se $n = 2$ (in tal caso evidentemente non ci sono gli ultimi integrali a secondo membro), come risulta ad esempio da [16]: pertanto per provarla in generale basta assumerla per $n-1$ al posto di n e dimostrarla per n. Fissato un numero reale a, sia $\Omega' = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : x_n = a\}$; è noto allora che la restrizione di u ed Ω' appartiene ad $H^2(\Omega')$ per quasi tutti gli a per cui Ω' è non vuoto. Lo stesso si può dire per le funzioni a_{ij}, cioè: se $(a_{ij})_{x_k} \in L_n(\Omega)$ (nel senso delle distribuzioni) per qualche valore di i, j, k, allora risulta $(a_{ij})_{x_k} \in L_n(\Omega')$ ancora per quasi ogni a. Indichiamo con L_0' l'operatore

$$L_0' = -\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

per l'ipotesi induttiva, supposta valida per $n-1$, si ha allora:

$$(6)\qquad \sum_{i,j=1}^{n-1} \|(\alpha u)_{x_i x_j}\|^2_{L_2(\Omega')} \leqslant K_2 \Big\{ \|L_0'(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2_{L_2(\Omega')} + \|\alpha u\|^2_{L_2(\Omega')} + \sum_{k=3}^{n-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} (2-\delta_{ij}) \cdot \int_{\Omega'} |(\alpha u)_{x_k}[(a_{ij})_{x_k}(\alpha u)_{x_i x_j} - (a_{ij})_{x_j}(\alpha u)_{x_i x_k}]|\, dx' \Big\}$$

(ove $dx' = dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$).

Poichè, come si è detto, la (6) vale per quasi ogni sezione Ω', integrando rispetto ad x_n si ha

$$(7)\qquad \sum_{i,j=1}^{n-1} \|(\alpha u)_{x_i x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant K_2 \Big\{ \|L_0'(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=3}^{n-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} (2-\delta_{ij}) \cdot \int_{\Omega} |(\alpha u)_{x_k}[(a_{ij})_{x_k}(\alpha u)_{x_i x_j} - (a_{ij})_{x_j}(\alpha u)_{x_i x_k}]|\, dx \Big\}$$

valida per ogni $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$, $u \in H^2(\Omega)$, $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$.

Procedendo poi ancora come in [17], si ha, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$(8)\qquad \nu \sum_{i=1}^{n} \|(\alpha u)_{x_i x_n}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\alpha u)_{x_i x_n} (\alpha u)_{x_j x_n} + \lambda (\alpha u)^2_{x_n}\, dx \Big\} =$$

$$= -\int_\Omega [L_0(\alpha u) + \lambda \alpha u](\alpha u)_{x_n x_n}\, dx + \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_\Omega a_{ij}[(\alpha u)_{x_i x_n}(\alpha u)_{x_j x_n} - (\alpha u)_{x_i x_j}(\alpha u)_{x_n x_n}]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|(\alpha u)_{x_n x_n}\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|L_0(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (2-\delta_{ij}) \int_\Omega (\alpha u)_{x_n}[(a_{ij})_{x_n}(\alpha u)_{x_i x_j} - (a_{ij})_{x_j}(\alpha u)_{x_i x_n}]\, dx\,.$$

Posto nella (8) $\varepsilon = \nu$ e tenuto conto della (7) è immediato pervenire alla (4) e quindi alla tesi per quanto riguarda la funzione αu, con $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$.

Resta da considerare il caso in cui il supporto di α abbia intersezione non vuota con la frontiera di Ω. Come in [17], si osserva che se tale frontiera, nel supporto di α, è piana e la normale ad essa coincide con uno degli assi coordinati, allora gli integrali su $\partial\Omega$ sono nulli. D'altra parte con un opportuno cambiamento di variabili ci si riconduce appunto al caso della frontiera piana; poichè il supporto di α può essere scelto arbitrariamente piccolo, si prova che l'errore commesso è un multiplo arbitrariamente piccolo di $\|(\alpha u)_{xx}\|_{L_2(\Omega)}$, da cui la tesi per la funzione αu con $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Si completa poi la dimostrazione, per provare la tesi per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, attraverso una partizione dell'unità. Per ulteriori dettagli su questa parte si veda ancora [17]. □

Osservazione. – Nel teorema precedente si sono supposte appartenenti ad $L_n(\Omega)$ le seguenti derivate (nel senso delle distribuzioni):

$$\begin{array}{ll} (a_{11})_{x_k} & \text{per } k = 1, 2, \ldots, n \\ (a_{12})_{x_k},\ (a_{22})_{x_k} & \text{per } k = 2, 3, \ldots, n \\ \ldots\ldots & \\ (a_{1n-1})_{x_k},\ (a_{2n-1})_{x_k},\ \ldots,\ (a_{n-1n-1})_{x_k} & \text{per } k = n-1, n\,. \end{array}$$

Quindi in tutto sono

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(n+1-j) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$

derivate.

Anzi, più precisamente si può dire (come si è già osservato) che per $n = 2$ la tesi è vera senza ipotesi sulle derivate delle funzioni a_{ij}. Pertanto nel teorema precedente si può ragionare per induzione solo per $n \geqslant 3$, quindi in realtà non è necessario supporre l'esistenza della derivata $(a_{11})_{x_2}$ in $L_n(\Omega)$.

Allora il numero effettivo di derivate di cui si suppone l'appartenenza ad $L_n(\Omega)$ è, come detto nell'introduzione,

$$\frac{n(n-1)(n+4)}{6} - 1\,.$$

Corollario 1. – *Supponiamo che, fissato un intero m con $0 \leqslant m \leqslant n-1$, risulti $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ per $i, j = 1, 2, \ldots, m$, e $(a_{ij})_{x_k} \in L_n(\Omega)$ (nel senso delle distribuzioni) per ogni i, j, k con $i \leqslant j$, $m+1 \leqslant j \leqslant n-1$, $j \leqslant k \leqslant n$. Allora vale la stessa conclusione del teorema precedente.*

Dimostrazione. – Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sostituiamo alle funzioni a_{ij} (per $i, j = 1, 2, \ldots, m$) il loro valore in un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$. Detto $\tilde{L}$ l'operatore ottenuto da L con tale modifica, se $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ è una funzione avente supporto compatto contenuto in $S(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < r\}$, si può scegliere r in modo che

$$\|(L - \tilde{L})(\alpha u)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|(\alpha u)_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \tag{9}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$. D'altra parte all'operatore $\tilde{L}$ (i cui coefficienti sono costanti per $i, j = 1, 2, \ldots, m$) si può evidentemente applicare il teorema precedente, e la costante K_1 della (3) non dipende da ε. Dalla (9) quindi, per partizione dell'unità, si può facilmente pervenire alla tesi del teorema precedente. □

Osservazione. – Il corollario precedente per $m = n-1$ ridà il risultato di Sharovskii [15], mentre per $m = 0$ ridà il teorema 1.

Corollario 2. – *Supponiamo soddisfatte le ipotesi del teorema 1 oppure del corollario 1; sia inoltre $c \geqslant C_0$ q.o. in Ω, con C_0 costante positiva. Allora il problema di Dirichlet (2) ha una ed una sola soluzione, qualunque sia la funzione f data in $L_2(\Omega)$.*

Dimostrazione. – Alla luce dei risultati precedenti, si può procedere come in [17] teorema 6 e corollario 7. □

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Alvino - G. Trombetti, *Esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet*, Methods of funtional analysis and theory of elliptic equations (ed. by D. Greco), Naples, September 13-16, 1982, 269-280.

[2] H. Brezis - L. C. Evans, *A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal., **71** (1979), 1-13.

[3] M. Chicco, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **85** (1970), 347-356.

[4] M. Chicco, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti continui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **88** (1971), 123-134.

[5] M. Chicco, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **92** (1972), 13-23.

[6] M. Chicco, *Regolarità e principio di massimo per le soluzioni di una*

classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui, Rend. Mat., (3) **2** (1982), 441-451.
[7] H. O. CORDES, *Zero order a priori estimates for solution of elliptic differential equations*, Proc. Symp. Pure Math., **4** (1961), 157-166.
[8] M. FRANCIOSI - N. FUSCO, *A $W^{2,2}$ bound for a class of elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ricerche Mat., **31** (1982), 207-218.
[9] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7** (1958), 102-137.
[10] V. IFTIMIE, *Sur le problème de Dirichlet pour les equations aux coefficients measurables*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **13** (1968), 1353-1360.
[11] A. I. KOŠELEV, *A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems*, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **20** (1962), 199-325.
[12] O. A. LADYZHENSKAYA - N. N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, 1968.
[13] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **63** (1963), 353-386.
[14] C. MIRANDA, *Su una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui*, An. Ştiint. Univ. « Al. I. Cuza » Jaşi Secţ. Ia Mat. (N.S.), **11**-B (1965), 209-215.
[15] A. A. SHAROVSKII, *On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients*, Moscow Univ. Math. Bull., **24** (1969), 47-50 (1971).
[16] G. TALENTI, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Matematiche (Catania), **21** (1966), 339-376.
[17] G. VIOLA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, in corso di stampa su Rend. Mat.

Istituto Matematico di Ingegneria, Università di Genova

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 5 luglio 1984

Bollettino U. M. I.
(6) 4-A (1985), 487-495

$\mathcal{S}$-Spaces by Means of the Behaviour of Hermite-Fourier Coefficients.

ANTONIO AVANTAGGIATI

Sunto. – *Si dimostra che gli spazi $\mathcal{S}_\beta^\beta(R)$ di Gel'fand e Shilov ([3], 2, Chap. IV) coincidono con certi spazi $U_{1/2\beta}(R)$ introdotti dall'Autore in precedenti lavori ([1], [2]), in base ad un carattere di decrescenza esponenziale di ordine $1/2\beta$ della successione dei coefficienti di Hermite-Fourier. Si deduce quindi che gli $\mathcal{S}_\beta^\beta(R)$ sono spazi di Montel.*

1. – Introduction and results.

$\mathcal{S}$-spaces were introduced, deeply studied and powerfully applied by Gel'fand and Shilov. They are subspaces of $\mathcal{S}(R)$, the Schwarz space of rapidly decreasing C^∞-functions. $\mathcal{S}$-spaces are structured as numerable normed spaces or as inductive limit of increasing sequences of normed spaces and moreover as topological algebras. Their topological duals are Ultradistribution spaces successfully used in Cauchy Problems, Differential Operator Theory and also in Spectral Analysis, as it is shown in [3], 2, 3, 4.

In this paper we are interested in the third class of the ones introduced in [3], 2, that is to the $\mathcal{S}_\alpha^\beta(R)$ spaces. These have been defined by means of

$$(1.1)\qquad «f \in \mathcal{S}_\alpha^\beta(R)» \Leftrightarrow «\exists A, B, C \in R_+: \quad \forall h, k \in N_0 \quad \|x^h f^{(k)}(x)\|_{L^\infty(R)} \leqslant C A^h B^k h^{h\alpha} k^{k\beta}» .$$

The topological structure is grounded on the evaluations

$$(1.2)\qquad \|\varphi\|_{A,B,m,n} = \sup_{x,h,k} \frac{|x^h \cdot \varphi^k(x)|}{(A + 1/m)^h \cdot (B + 1/n)^k \cdot h^{h\alpha} \cdot k^{k\beta}},$$

which lead to the normed spaces $\mathcal{S}_{\alpha,A,m}^{\beta,\beta,n}$ of all φ such that $\|\varphi\|_{A,B,m,n} <$