Errori frequenti: ordine di infinitesimo o infinito in relazione alle funzioni $e^x, \log x$.

È nota la definizione di *ordine di infinitesimo* di una funzione. Si dice che una funzione f, definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di cui x_o sia punto di accumulazione, è infinitesima di ordine α (numero reale positivo) per $x \to x_o$, se la funzione $f(x)/|x - x_o|^\alpha$ ammette limiti destro e sinistro, per $x \to x_o$, reali e diversi da zero. (Analoghe definizioni, con ovvie modifiche, nel caso in cui x tenda a $+\infty$ o $-\infty$, o per l'ordine di infinito anziché di infinitesimo).

È pure noto che le funzioni $e^x,\ \log x$ hanno particolari comportamenti, riguardo all'ordine di infinito od infinitesimo, per x tendente agli estremi del loro intervallo di definizione. In particolare risulta (per ogni α reale e positivo):

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0, \ \lim_{x\to+\infty} e^x/x^\alpha = +\infty, \ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \ \lim_{x\to+\infty} (\log x)/x^\alpha = 0$$

Col linguaggio degli ordini, questi risultati si possono esprimere dicendo che la funzione esponenziale, per $x \to -\infty$, è infinitesima di ordine superiore a qualunque potenza di $|1/x|$, mentre per $x \to +\infty$ la stessa funzione è infinita di ordine superiore a qualunque potenza di x. Analogamente per il logaritmo si può dire che tale funzione, per $x \to 0^+$, è infinita di ordine inferiore a qualunque potenza di $1/x$, mentre per $x \to +\infty$ la stessa funzione è infinita di ordine inferiore a qualunque potenza di x.

Tutto questo, ripeto, riguarda il comportamento di tali funzioni **agli estremi del loro intervallo di definizione** (ciè, come si è visto, $-\infty$ e $+\infty$ per l'esponenziale, 0^+ e $+\infty$ per il logaritmo). In tutti gli altri punti tali funzioni si comportano in modo “normale”: si può fare infatti la seguente banale osservazione.

Proposizione. *Sia f una funzione, definita in un intorno di $x_o \in \mathbb{R}$, nulla in x_o e derivabile in x_o, con $f'(x_o) \neq 0$. Allora f è infinitesima, per $x \to x_o$, di ordine 1.*

Dimostrazione. Basta scrivere la definizione di derivata di f nel punto x_o, ricordando che $f(x_o) = 0$ per ipotesi: si ha

$$\lim_{x\to x_o} f(x)/(x - x_o) = f'(x_o)$$

Poiché per ipotesi è $f'(x_o) \neq 0$, questa è esattamente la definizione del fatto che f, per $x \to x_o$, è infinitesima di ordine 1. $\square$

Se ora applichiamo la propostzione precedente ad esempio alla funzione $g_1(x) := e^x - 1$, ci accorgiamo che essa è infinitesima, per $x \to 0$, di ordine 1. Più in generale la funzione $g_a(x) := e^x - a$ (con a reale positivo) è infinitesima, per $x \to \log a$, di ordine 1. Quanti studenti hanno detto (e purtroppo ancora diranno...) che, trattandosi di un'esponenziale, la funzione è infinitesima di ordine superiore a qualunque α? Analoghe considerazioni si possono fare per le funzioni del tipo $\log x - a$, essendo questa volta a un numero reale qualunque. Tale funzione, che si annulla nel punto e^a, è in tale punto infinitesima di ordine 1 (si applichi nuovamante la proposizione precedente).