CHICCO, MAURIZIO
1970
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LXXXVII, pp. 1-10

Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*) (**)

Summary. - *I prove a generalized maximum principle and an evaluation of the first eingenvalue for linear second order elliptic partial differential equations in divergence form with discontinuous coefficients.*

Introduzione. - Scopo del presente lavoro è dimostrare i seguenti risultati per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine, di tipo variazionale e a coefficienti discontinui (studiate da G. STAMPACCHIA in [10]):

1) principio di massimo generalizzato: affinchè ogni sottosoluzione non positiva su $\partial\Omega$ sia necessariamente non positiva in Ω, occorre e basta che esista una sottosoluzione negativa in Ω;

2) valutazione del primo autovalore: servendosi dell'enunciato precedente si stabilisce una caratterizzazione dell'autovalore della equazione avente massima parte reale.

Tali risultati sono in parte noti per le equazioni lineari ellittiche in forma non variazionale; si vedano ad esempio i lavori di PROTTER e WEINBERGER [8], [9] e di PEETRE e RUS [7].

NOTAZIONI, DEFINIZIONI, IPOTESI. Nel seguito si faranno le seguenti ipotesi, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n. Supponiamo per semplicità $n \geq 3$; i risultati sono validi anche per $n = 2$ pur di modificare qualche esponente di sommabilità negli spazi funzionali incontrati.

Sia Γ_0 un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e sia $\Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$. Supponiamo che $\partial\Omega$ sia abbastanza regolare, ad esempio localmente lipschitziana (1).

Siano $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\overline{\Omega})$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Centro di ricerca di matematica e fisica teorica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Genova.

(**) Entrata in Redazione il 14 luglio 1970.

(1) Questa ipotesi si potrebbe ridurre; come in [2] basterebbe supporre che esista un aperto Ω_1 dotato di frontiera localmente lipschitziana e tale che $\Omega_1 \supset \Omega$, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_1$.

e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Sia B compatto, $B \subset \overline{\Omega}$, $u \in H^1(\Omega)$. Diremo che $u \leq k$ $(u = k)$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_j \leq k$ $(u_j = k)$ in B e $\lim_{j \to \infty} \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Il seguente lemma stabilisce una connessione tra le diseguaglianze nel senso di $H^1(\Omega)$ e quelle nel senso della misura ordinaria.

LEMMA 1. - *Sia $u \in H^1(\Omega)$, $u \leq k$ quasi ovunque in Ω. Allora è $u \leq k$ nel senso di $H^1(\Omega)$ in ogni compatto contenuto in Ω.*

Dimostrazione: vedi [6] pag. 46 e bibliografia ivi citata [2].

Nel seguito la frase «nel senso di $H^1(\Omega)$» sarà omessa ogni volta in cui ciò non crea ambiguità. Indichiamo con V il sottospazio lineare di $H^1(\Omega)$ così definito:

$$V = H^1(\Omega) \cap \{f : f = 0 \text{ su } \Gamma_0\}.$$

Sia $B \subset \overline{\Omega}$. Si definisce capacità di B rispetto ad Ω il numero

$$\operatorname{cap}_\Omega B = \inf \{\|v\|^2_{H^1(\Omega)} : v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v \geq 1 \text{ in } B\}.$$

Sussiste il seguente:

LEMMA 2. - *Sia $B \subset \Omega$, $\operatorname{cap}_\Omega B > 0$. Allora esiste una costante K_1 dipendente da Ω, B, n tale che*

$$\|u\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq K_1 \|u_x\|_{L_2(\Omega)}$$

per ogni $u \in V$, $u = 0$ in B.

Dimostrazione: vedi [2].

Vale anche il risultato seguente, riguardante le tracce delle funzioni di V su Γ_1:

LEMMA 3. - *Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $q < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$ esiste una costante K_2 dipendente q, n, ε, Ω tale che sia*

---

[2] Per il confronto tra le disuguaglianze nel senso di $H^1(\Omega)$ e quelle nel senso della capacità si veda [3].

$$\| u \|_{L_q(\Gamma_1)} \leq \varepsilon \| u_x \|_{L_2(\Omega)} + K_2 \| u \|_{L_2(\Omega)} .$$

per ogni $u \in V$.

Dimostrazione: vedi ad esempio [5], pag. 49.

Siano poi: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geq \nu |t|^2$, ν costante positiva, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$, $c \in L_{\frac{p}{2}}(\Omega)$, $e \in L_{p-1}(\Gamma_1)$, $p > n$,

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx + \int_{\Gamma_1} euv \, d\sigma .$$

Per le ipotesi fatte, per la disuguaglianza di HÖLDER e per noti teoremi sugli spazi di SOBOLEV, l'espressione $a(.,.)$ è una forma bilineare e continua su $H^1(\Omega)$ (vedi [5], [10]).

Sarà utile il seguente risaltato di G. STAMPACCHIA:

LEMMA 4. - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $u \leq 0$ *in* Ω, u *non identicamente nulla in* Ω, $a(u, v) = 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$. *Allora per ogni dominio compatto D contenuto in* Ω *risulta* $\operatorname{ess}_D \sup u < 0$.

Dimostrazione: vedi [10] corollario 8.1.

Di qui, con procedimente simile a quello usato in [1], si ricava il

COROLLARIO 1. - *Sia* $w \in H^1(\Omega)$, $w \leq 0$ *in* Ω, w *non identicamente nulla in* Ω, $a(w, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. *Allora per ogni dominio compatto D contenuto in* Ω *risulta* $\operatorname{ess}_D \sup w < 0$.

DIMOSTRAZIONE. - Per assurdo sia x_0 un punto interno ad Ω tale che $\operatorname{ess}_A \sup w = 0$ per ogni aperto A con $x_0 \in A \subset \Omega$. Si possono dare due casi.

1° *caso*: w non è identicamente nulla in nessun intorno di x_0. Allora sia S una sfera in modo che $x_0 \in S \subset \Omega$, $w \notin H_0^1(S)$ e la forma bilineare $a(.,.)$ sia coercitiva su $H_0^1(S)$, cioè esista una costante positiva C_0 con

$$a(z, z) \geq C_0 \| z \|^2_{H_0^1(S)} \qquad \text{per ogni } z \in H_0^1(S).$$

Per ottenere ciò basta che la misura di S sia abbastanza piccola (vedi [10] teorema 3.1).

Consideriamo la soluzione u del problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} a(u, v) = 0 & \forall\, v \in H_0^1(S), \\ u - w \in H_0^1(S). \end{cases}$$

Tale soluzione esiste per [10], teorema 3.3. Inoltre si vede facilmente che

$$w \leq u \qquad \text{in } S. \tag{1}$$

Infatti posto $g = \max(w - u, 0)$ è $g \in H_0^1(S)$, $g \geq 0$ e quindi $a(g, g) = a(w - u, g) \leq 0$, da cui $g = 0$ in S. In modo simile si vede che $u \leq 0$ in S, e u non è identicamente nulla in S perchè $u - w \in H_0^1(S)$, $w \notin H_0^1(S)$. Per il lemma precedente è $\text{ess}_D \sup u < 0$ per ogni dominio compatto D contenuto in S; se però $x_0 \in \overset{0}{D}$, risulta $\text{ess}_D \sup w = 0$, e ciò è assurdo perchè in contrasto con la (1).

2° *caso*: sia w identicamente nulla in un intorno di x_0. Posto $B = \{x : x \in \Omega,\ w(x) = 0\}$, consideriamo un aperto A con $B \cup \{x_0\} \subset A \subset \Omega$ e tale che $w \notin H_0^1(A)$. La scelta di un A siffatto si può realizzare in modo che $\text{mis}(A - B)$ sia arbitrariamente piccola. Poniamo

$$\tilde{b}_i(x) = \begin{cases} b_i(x) & \text{per } x \in A - B, \\ 0 & \text{per } x \in B, \end{cases}$$

e in modo analogo $\tilde{d}_i$, $\tilde{c}$. Sia poi

$$\tilde{a}(w, v) = \int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{b}_i w_{x_i} v + \tilde{d}_i w\, v_{x_i}) + \tilde{c} w v \right\} dx .$$

È chiaro che risulta $\tilde{a}(w, v) = a(w, v)$ per ogni $v \in H_0^1(A)$. Ora scegliamo A in modo che la forma $\tilde{a}(\,.\,,\,.\,)$ sia coercitiva su $H_0^1(A)$: segue dal teorema 3.1 di [10] che ciò accade non appena $\text{mis}(A - B)$ è abbastanza piccola. A questo punto si considera la soluzione $\tilde{u}$ del problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} \tilde{a}(\tilde{u}, v) = 0 & \forall\, v \in H_0^1(A), \\ \tilde{u} - w \in H_0^1(A) . \end{cases}$$

La conclusione è identica a quella del caso precedente, c.v.d.

Richiamiamo ancora, per convenienza del lettore, un noto risultato: è un importante teorema di KREIN e RUTMAN sugli operatori « che lasciano invariante un cono in uno spazio di BANACH. »

Dato uno spazio di BANACH X e un suo sottoinsieme chiuso K, K si dice un cono se: 1) se $\lambda \geq 0$, $x \in K$ allora $\lambda x \in K$; 2) se $x, y \in K$ allora $x + y \in K$; 3) se $x \in K$, $x \neq 0$ allora $-x \notin K$ (vedi [4]).

Si dice che l'operatore $T: X \to X$ lascia invariante il cono K se $TK \subset K$.

LEMMA 5. - *Sia T un operatore lineare e completamente continuo di X*

in sè che lascia invariante un cono K e avente almeno un autovalore diverso da zero. Allora T ha un autovalore positivo non minore, in modulo, di ogni altro autovalore.

Dimostrazione: vedi [4] teorema 6.1 (pag. 262).

Possiamo ora enunciare il primo risultato del presente lavoro.

TEOREMA 1. - *I due enunciati seguenti sono equivalenti*:

a) *per qualunque funzione $u \in H^1(\Omega)$ tale che $u \leq 0$ su Γ_0 e $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in V$, $v \geq 0$, risulta $u \leq 0$ in Ω.*

b) *esiste una funzione $w \in H^1(\Omega)$* tale che:

$w \leq 0$ *in* Ω, $a(w, v) < 0$ *per ogni* $v \in V$, $v > 0$ *in* Ω.

Dimostrazione: a) $\Rightarrow$ b). Sia $f \in C^0(\bar{\Omega})$, $f < 0$ in $\bar{\Omega}$; consideriamo il problema al contorno

$$(2) \qquad \begin{cases} a(w, v) = \displaystyle\int_\Omega f\, v\, dx & \forall v \in V, \\ w \in V. \end{cases}$$

Esso ammette al più una soluzione per la condizione a). Ma poichè il problema (2) si inquadra nella teoria di RIESZ-FREDHOLM (vedi ad esempio [5] pag. 162) vale per esso anche il teorema di esistenza; sia w la soluzione. Per la condizione a) e per la scelta di f risulta $w \leq 0$ in Ω, $a(w, v) < 0$ se $v \in V$, $v > 0$ in Ω.

b) $\Rightarrow$ a). Sia $u \in H^1(\Omega)$, $u \leq 0$ su Γ_0, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in V$, $v \geq 0$; facciamo vedere che $u \leq 0$ in Ω.

Consideriamo, per k reale, la funzione $w_k = \max(u + kw, 0)$, ove w è la funzione data in b). Sia

$$\Omega(k) = \{x : x \in \Omega,\ w_k(x) > 0\},$$

$$k_0 = \inf\{k : w_k = 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Evidentemente la tesi sarà provata non appena si dimostri che $k_0 \leq 0$. Per assurdo sia $k_0 > 0$. Scelto un dominio compatto D contenuto in Ω, essendo $\mathrm{ess}_D \sup w < 0$ (corollario 1), $\mathrm{ess}_D \sup u < +\infty$ (vedi [10] paragrafo 5) si deduce che esiste un numero h tale che

$$(3) \qquad w_k = 0 \text{ in } D \qquad \text{per } k \geq h.$$

Data l'arbitrarietà di D si ha intanto

$$(4) \qquad \lim_{k \to +\infty} \text{mis}\ \Omega(k) = 0.$$

Facciamo ora vedere che, anche se k_0 è finito, risulta

$$\lim_{k \to k_0} \text{mis}\, \Omega(k) = 0 . \tag{5}$$

Infatti se così non fosse si avrebbe l'esistenza di un sottoinsieme B di Ω, avente misura positiva, tale che $u + k_0 w = 0$ in B, $u + k_0 w \leq 0$ in Ω. Per il corollario 1 applicato alla funzione $u + k_0 w$, seguirebbe che $u + k_0 w = 0$ in Ω.

Cioè $u = -k_0 w$, da cui si avrebbe $a(w, v) = 0$ per ogni $v \in V$, assurdo perchè in contrasto con b). La (5) resta quindi provata. Da essa si deduce che esiste un sottoinsieme B^* di Ω avente capacità positiva rispetto ad Ω ed un numero k_1 tali che: $0 < k_1 < k_0$,

$$w_k = 0 \text{ in } B^* \text{ per ogni } k \geq k_1 . \tag{6}$$

Inoltre per gli stessi valori di k risulta $w_k \in V$, $w_k \geq 0$ in Ω, $w_k = 0$ in $\Omega - \Omega(k)$, da cui

$$a(u + kw, w_k) = a(w_k, w_k) \leq 0 \tag{7}$$

Applicando ora la diseguaglianza di Hölder, le ipotesi fatte sui coefficienti e il lemma 3 si ha:

$$\begin{aligned} \nu \| (w_k)_x \|^2_{L_2(\Omega(k))} \leq \sum_{i=1}^{n} \| b_i + d_i \|_{L_n(\Omega(k))} \quad \| (w_k)_x \|_{L_2(\Omega(k))} \cdot \| w_k \|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega(k))} + \\ + \| c \|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \cdot \| w_k \|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega(k))} + \| e \|_{L_{p-1}(\Gamma_1)} \cdot [\varepsilon \| (w_k)_x \|^2_{L_2(\Omega(k))} + K_2 \| w_k \|^2_{L_2(\Omega(k))}] \end{aligned} \tag{8}$$

Scegliamo ora $\varepsilon = \dfrac{\nu}{2 \| e \|_{L_{p-1}(\Gamma_1)}}$ e applichiamo ancora la diseguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \| (w_k)_x \|^2_{L_2(\Omega(k))} \leq \sum_{i=1}^{n} \| b_i + d_i \|_{L_n(\Omega(k))} \cdot \| (w_k)_x \|_{L_2(\Omega(k))} \cdot \| w_k \|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega(k))} + \\ + \| c \|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \cdot \| w_k \|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega(k))} + K_2 \| e \|_{L_{p-1}(\Gamma_1)} \cdot (\text{mis}\, \Omega(k))^{2/n} \cdot \| w_k \|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega(k))} . \end{aligned} \tag{9}$$

Tenendo presente la (6) e applicando il lemma 2 si trova

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \| (w_k)_x \|^2_{L_2(\Omega(k))} \leq K_1 \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \| b_i + d_i \|_{L_n(\Omega(k))} + K_1 \| c \|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega(k))} + \\ + K_1 K_2 \| e \|_{L_{p-1}(\Gamma_1)} \cdot (\text{mis}\, \Omega(k))^{\frac{2}{n}} \Bigg] \cdot \| (w_k)_x \|^2_{L_2(\Omega(k))} \end{aligned} \tag{10}$$

Allora dalla (10) e dalla (5) segue che se k è minore di k_0 ma abbastanza vicino a k_0, risulta $\|(w_k)_*\|_{L_2(\Omega(k))} = 0$ cioè $w_k^* = 0$ in Ω, assurdo. È quindi assurdo supporre $k_0 > 0$. *c.v.d.*

COROLLARIO 2. - *Supponiamo che valga la condizione* a) *del teorema precedente. Sia un* μ *numero positivo, sia* $z \in H^1(\Omega)$, $z \leq 0$ *su* Γ_0,

$$a(z, v) + \mu(z, v)_{L_2(\Omega)} \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad v \in V,\ v \geq 0.$$

Allora è $z \leq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Per il teorema precedente esiste una funzione $w \in H^1(\Omega)$ tale che: $w \leq 0$ in Ω, $a(w, v) < 0$ per ogni $v \in V$, $v < 0$.

Ovviamente risulta a fortiori $a(w, v) + \mu(w, v)_{L_2(\Omega)} < 0$ per ogni $v \in V$, $v > 0$. Pertanto il teorema 1, applicato nel senso b) $\Rightarrow$ a) alla forma bilineare $a(\cdot, \cdot) + \mu(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$ fornisce la tesi. *c.v.d.*

I risultati precedenti permettono di stabilire una limitazione per gli autovalori del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(u, v) + \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 & \forall v \in V, \\ u \in V. \end{array} \right. \tag{11}$$

TEOREMA 2. - *Sia* λ_1 *l'autovalore del problema* (11) *avente massima parte reale. Allora* λ_1 *è reale e risulta*

$$\lambda_1 = -\sup \left\{ \inf_{\substack{v \in V \\ v > 0}} \frac{a(w, v)}{(w, v)_{L_2(\Omega)}} : w \in H^1(\Omega),\ w < 0 \text{ in } \Omega \right\}.$$

Dimostrazione (adattata in parte da [9]).

1) Cominciamo a far vedere che λ_1 è reale. Supponendo che il numero reale μ non appartenga allo spettro di (11) si può considerare l'operatore

$$G_\mu : L_2(\Omega) \to V$$

definito nel modo seguente:

$$a(G_\mu u, v) + \mu(G_\mu u, v)_{L_2(\Omega)} = (u, v)_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall v \in V. \tag{12}$$

Tale operatore è completamente continuo in $L_2(\Omega)$. Sia ora μ abbastanza grande in modo che esista una costante positiva c_0 con

$$a(z, z) + \mu \|z\|^2_{L_2(\Omega)} \geq c_0 \|z\|^2_{H_1(\Omega)}, \quad \forall z \in V. \tag{13}$$

(Ciò è certamente possibile: vedi [5] pag. 162 oppure [10] pag. 200).

Se vale la (13) μ non è nello spettro, e inoltre: se $u \in L_2(\Omega)$, $u \leq 0$ in Ω, ne segue $G_\mu u \leq 0$ in Ω. Infatti, posto $\widehat{u} = \max(G_\mu u, 0)$, per la (12) con $v = \widehat{u}$ e la (13) si ha:

$$c_0 \|\widehat{u}\|^2_{H_1(\Omega)} \leq a(\widehat{u}, \widehat{u}) + \mu \|\widehat{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = (u, \widehat{u})_{L_2(\Omega)} \leq 0,$$

cioè $\widehat{u} = 0$ in Ω e $G_\mu u \leq 0$ in Ω.

Allora tale operatore G_μ (sempre che valga la (13)) soddisfa alle ipotesi del lemma 5. Pertanto esiste un autovalore reale t_1 di G_μ che ha modulo massimo tra tutti gli autovalori di G_μ:

(14) $$|t| \leq t_1 \qquad \text{per ogni } t \text{ autovalore di } G_\mu .$$

D'altra parte è facile verificare che se λ è un autovalore del problema (11), il numero $t = (\mu - \lambda)^{-1}$ è un autovalore dell'operatore G_μ e viceversa. Pertanto, posto $t_1 = (\mu - \lambda_1)^{-1}$, la (14) fornisce

(15) $$|\mu - \lambda| \geq \mu - \lambda_1 \text{ per ogni } \lambda \text{ autovalore di (11)}.$$

Poichè la (15) vale per ogni μ abbastanza grande, si può in essa far divergere positivamente μ, ottenendo

(16) $$\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1, \text{ per ogni } \lambda \text{ autovalore del problema (11)}.$$

Ciò prova che esiste un autovalore reale di massima parte reale.

2) Posto $$\lambda' = -\sup\left\{ \inf_{\substack{v \in V \\ v > 0}} \frac{a(w, v)}{(w, v)_{L_2(\Omega)}} : w \in H^1(\Omega),\ w < 0 \text{ in } \Omega \right\},$$

facciamo vedere che λ' è un autovalore del problema (11).

Supponiamo per assurdo che non lo sia; allora si può considerare l'operatore $G_{\lambda'}$ e risulta $G_{\lambda'} u \leq 0$ in Ω per ogni $u \in L_2(\Omega)$, $u \leq 0$ in Ω. Infatti si verifica facilmente che

$$\lim_{\mu \to \lambda' +} \| G_\mu u - G_{\lambda'} u \|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \text{e} \quad G_\mu u \leq 0 \text{ in } \Omega \text{ se } \mu > \lambda'$$

per definizione di λ' e per il teorema 1. Inoltre se λ' non è un autovalore e se $0 < \lambda' - \mu < \| G_{\lambda'} \|$, neppure μ è un autovalore e si ha

$$G_\mu = G_{\lambda'} [I - (\lambda' - \mu) G_{\lambda'}]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda' - \mu)^j G_{\lambda'}^{j+1}$$

Pertanto anche per tali scelte di μ risulta $G_\mu u \leq 0$ in Ω non appena $u \leq 0$ in Ω. Se $w = G_\mu u$ con $u \in L^2(\Omega)$, $u < 0$ in Ω, risulta $a(w, v) + \mu(w, v)_{L_2(\Omega)} < 0$ per ogni $v \in V$, $v > 0$ in Ω. Per il corollario 1 è anche $w < 0$ in Ω.

Ne segue $\inf\limits_{\substack{v \in V\\ v>0}} \dfrac{a(w, v)}{(w, v)_{L_2(\Omega)}} > -\mu$, e questo è assurdo essendo $\mu < \lambda'$ (si veda la definizione di λ'). Si conclude che λ' è un autovalore.

3) Si è già provato che λ_1 è l'autovalore di massima parte reale, quindi risulta $\lambda' \leq \lambda_1$.

4) Basta ormai far vedere che $\lambda_1 \leq \lambda'$.

Sia $p > \lambda'$ e dimostriamo che $p > \lambda_1$. Se $p > \lambda'$ esiste $w \in H^1(\Omega)$, $w < 0$ in Ω tale che $-p < \inf\limits_{\substack{v \in V\\ v>0}} \dfrac{a(w, v)}{(w, v)_{L_2(\Omega)}}$, da cui $a(w, v) + p(w, v)_{L_2(\Omega)} < 0$ per ogni $v \in V$, $v > 0$. Segue dal teorema 1 che p non è un autovalore del problema (11) e per il corollario 2 neppure i numeri maggiori di p lo sono. Ciò prova che $\lambda_1 < p$ e quindi $\lambda_1 \leq \lambda'$. *c.v.d.*

Osservazione. - I risultati precedentemente provati permetterebbero di studiare come varia il primo autovalore modificando lo spazio V, o il dominio Ω, o i coefficienti c, e della forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$. Si ritroverebbero in parte risultati analoghi a quelli di [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Chicco, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (3), vol. **22** (1967), pag. 368-372.

[2] — —, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, in corso di stampa (sullo stesso bollettino).

[3] — —, *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$*, in corso di pubblicazione.

[4] M. G. Kreĭn, M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, A.M.S. Translations (1) vol. **10** (1962) pag. 199-325.

[5] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York (1968).

[6] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), vol. **17** (1963), pag. 43-77.

[7] J. Peetre, I. A. Rus, *Sur la positivité de la fonction de Green*, Mat. Scand., vol. **21** (1967), pag. 80-89.

[8] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1968).

[9] — —, — —, *On the spectrum of general second order operators*, Bull. Am. Math. Soc. vol. **72** (1966), pag. 251-255.

[10] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les èquations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, vol. **15** (1965), pag. 189-258.