CHICCO, M.
Boll. U. M. I. - N. 3, 1970, pp. 379-383

Un'osservazione sulla regolarità alla frontiera delle soluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. - *I prove that a previous result of G. Stampacchia concerning the uniformity of regular boundary points for solutions of elliptic partial differential equations of the second order and in divergence form is valid under weaker hypotheses on the coefficients.*

1. - Introduzione.

In recenti lavori W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA, H. F. WEINBERGER [2] e G. STAMPACCHIA [3] si sono occupati del problema di caratterizzare i punti di $\partial\Omega$ regolari rispetto ad un operatore ellittico del secondo ordine in forma variazionale e a coefficienti discontinui, del tipo

$$Lu = -\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} + d_j u\Big)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \,.$$

Il risultato dimostrato a tale proposito nei lavori [2] e [3] è il seguente: un punto $x^0 \in \partial\Omega$ è regolare per l'operatore L se e solo se è tale per l'operatore di LAPLACE. Alcune delle ipotesi fatte sui coefficienti sono le seguenti: in [2] si suppone $a_{ij} = a_{ji}$, $c \equiv d_i \equiv b_i \equiv 0$ in Ω per $i, j = 1, 2, \ldots, n$; in [3] si suppone

$$c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0 \qquad \text{nel senso delle distribuzioni}\,.$$

Scopo principale del presente lavoro è dimostrare che anche questa ultima ipotesi può essere soppressa.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del centro di ricerca di matematica e fisica teorica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Genova.

cfr. Stampacchia p. 251 "Le pb. di Dirichlet..."

2. – Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n; $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ siano gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega)} .$$

Le funzioni di $H^1(\Omega)$ risultano definite in tutti i punti di Ω salvo quelli di un sottoinsieme di Ω avente capacità nulla (vedi [4]). Per brevità diremo « la funzione $u \in H^1(\Omega)$ gode di una certa proprietà » in luogo di: « la funzione $u \in H^1(\Omega)$ può essere modificata in un sottoinsieme di Ω avente capacità nulla in modo che goda di una certa proprietà ».

Siano poi: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geq \nu |t|^2$, ν costante positiva,

$$b_i \in L_n(\Omega) , \qquad d_i \in L_p(\Omega) , \qquad c \in L_{p/2}(\Omega) , \qquad p > n ,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx .$$

DEFINIZIONE 1. – « *Un punto $x^0 \in \partial\Omega$ si dice regolare rispetto all'operatore L se, comunque si scelgano le funzioni $g \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $f_i \in L_p(\Omega)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con $p > n$, $u \in H^1(\Omega)$ tali che*

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} dx & \textit{per ogni } v \in C_0^1(\Omega) , \\ u - g \in H_0^1(\Omega) , & \end{cases}$$

risulta $\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} u(x) = g(x^0)$. »

OSSERVAZIONE. – Se $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq 0$ nel senso delle distribuzioni e se $f_i \equiv 0$ in Ω $(i = 1, 2, \ldots, n)$, questa definizione è equivalente a quella classica, cioè: un punto $x^0 \in \partial\Omega$ si dice regolare rispetto all'operatore L se per ogni $g \in C^0(\partial\Omega)$ esiste una ed una sola funzione $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$ e $\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} u(x) = g(x^0)$.

Infatti per i risultati di [1] vale il principio di massimo e quindi si possono ripetere le considerazioni di [2] pag. 54.

DEFINIZIONE 2. – « *Un punto $x^0 \in \partial\Omega$ si dice regolare rispetto all'operatore di Laplace se per ogni funzione $g \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ la soluzione z del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n z_{x_i} v_{x_i}\, dx = 0 & \textit{per ogni } v \in C_0^1(\Omega) \\ z - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

è tale che $\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} z(x) = g(x^0)$. »

TEOREMA. – « *Un punto $x^0 \in \partial\Omega$ è regolare rispetto all'operatore L se e solo se è regolare rispetto all'operatore di Laplace.* »

DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo dapprima x^0 regolare rispetto all'operatore di LAPLACE e facciamo vedere che x^0 è regolare rispetto all'operatore L. Siano allora g, f_i, u scelte come nella definizione 1. Sia A un aperto contenente $\bar{\Omega}$. Prolunghiamo i coefficienti della forma $a(.,.)$ in $A - \Omega$ nel modo seguente: $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $b_i(x) = d_i(x) = f_i(x) = 0$ per $x \in A - \Omega$ e continuiamo a chiamare $a(.,.)$ la forma bilineare su $H_0^1(A) \times H_0^1(A)$ così ottenuta. Consideriamo il problema di DIRICHLET seguente:

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i w_{x_i} v \right\} dx = \int_A \left\{ \sum_{i=1}^n (f_i v_{x_i} - d_i u v_{x_i}) - cuv \right\} dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{per ogni } v \in C_0^1(A)\,, \\ w \in H_0^1(A)\,. \end{cases}$$

Tale problema ammette una ed una sola soluzione w per i risultati di [1]. Questa soluzione è continua in A e quindi in $\bar{\Omega}$: infatti si può applicare il teorema 7.2 di [3] tenendo conto che $u \in L_\infty(\Omega)$ per i teoremi 4.1, 4.2 di [3]. Consideriamo poi la soluzione z del problema seguente:

$$(3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i z_{x_i} v \right\} dx = 0 & \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega) \\ z + g - w \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

La soluzione di (3) esiste ed è unica di nuovo per [1].

Se il punto x^0 è regolare rispetto all'operatore di LAPLACE risulta allora

$$(4)\qquad \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} z(x) = w(x^0) - g(x^0)$$

comunque si sia scelta la funzione $g \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (e la w corrispondente per la (2)). Infatti la funzione z soddisfa ad una equazione, come la prima delle (3), in cui sono nulli i coefficienti c e d_i. Si osserva che si possono applicare i risultati del capitolo 10 di [3], in quanto l'unica ipotesi che ora mancherebbe è che $c - \sum_{i=1}^{n}(d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0$ nel senso delle distribuzioni. Tale ipotesi serviva, in [3], ad assicurare la validità del principio di massimo, il quale peraltro vale anche se $c \equiv d_i \equiv 0$ come risulta da [1]. Pertanto si possono applicare i risultati di [3] al problema (3) e vale quindi la (4) se il punto x^0 è regolare rispetto all'operatore di LAPLACE. Confrontando le (2) e (3) si osserva infine che

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(w-z)_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i (w-z)_{x_i} v \Big\} dx = \\ \displaystyle\qquad = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (f_i v_{x_i} - d_i u v_{x_i}) - cuv \Big\} dx \qquad \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ w - z - g \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Per la (1) e per l'unicità (che discende sempre da [1]) deve essere $w - z \equiv u$ in Ω; poiché w è continua in $\bar{\Omega}$, dalla (4) segue che

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} u(x) = g(x^0)\,.$$

Viceversa dimostriamo che se il punto x^0 è regolare rispetto all'operatore L (vedi definizione 1) esso è regolare anche rispetto all'operatore di LAPLACE. Siano $g \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $z \in H^1(\Omega)$ tali che

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i z_{x_i} v \Big) dx = 0 \qquad \text{per ogni } v \in C(\Omega)\,, \\ z - g \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Facciamo vedere che

$$(7)\qquad \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} z(x) = g(x^0)\,.$$

Infatti risulta intanto

$$(8)\qquad a(z, v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i z v_{x_i} + czv \Big) dx \qquad \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Sia A un aperto contenente $\bar{\Omega}$ e sia w la soluzione del problema di DIRICHLET

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta w = cz & \text{in } \Omega \\ \Delta w = 0 & \text{in } A - \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial A\,. \end{cases}$$

Risulta $z \in L_\infty(\Omega)$ (teorema 4.1 di [3]), e quindi $d_i z \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Inoltre essendo $cz \in L_{p/2}(\Omega)$, per noti teoremi è anche $w_{x_i} \in L_q(\Omega)$, con $q > n$. Si ha poi dalle (8), (9):

$$(10)\qquad \begin{cases} a(z, v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (d_i z - w_{x_i}) v_{x_i} dx & \text{per ogni } v \in C_0^1(\Omega)\,, \\ z - g \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Allora dalle (10) e dalle ipotesi fatte segue la (7). A questo punto si possono nuovamente applicare al problema (6) i risultati del capitolo 10 di [3]. Infatti il problema (6) ammette una ed una sola soluzione qualunque sia $g \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ scelta, e vale per essa il principio di massimo: vedi [1]. Dalla (7) e dai risultati di [3] segue quindi che il punto x^0 è regolare rispetto all'operatore di LAPLACE.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. U.M.I., S. III, **22** (1967), pp. 368-372.

[2] W. LITTMANN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **17** (1963), pp. 43-77.

[3] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15**, 1 (1965), pp. 189-258.

[4] J. DENY - L. LIONS, *Les espaces de B. Levi*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **5** (1953-54), pp. 305-370.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 31 dicembre 1969