BIBLIOGRAFIA

[1] E. Bompiani: *Geometria degli elementi differenziali del piano rispetto al gruppo proiettivo,* Istituto Matematico dell'Università di Roma, (1955).

[2] E. Bompiani: *Rappresentazione di elementi differenziali del piano proiettivo,* Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, (1956-57).

[3] C. Ehresmann: *Sur la topologie de certaines espaces homogènes,* Annals of Math., 35, pp. 396-443, (1934).

[4] C. Ehresmann: *Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles,* Jour. de Math. pures et appl., 102, pp. 69-100, (1937).

[5] F. Gherardelli: *Successioni spettrali e alcune loro applicazioni alla geometria algebrica,* Libreria Goliardica, Pisa, (1958).

[6] G. Gherardelli: *Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2⁰ ordine del piano proiettivo,* Rend. Acc. d'Italia, 2, pp. 821-828, (1941).

[7] C. Longo: *Gli elementi differenziali del 2⁰ ordine di S_r,* Rend. di Mat. e delle sue Applic., 8, pp. 335-372, (1955).

[8] C. Longo: *Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2⁰ ordine di S_r,* Rend. Acc. Lincei, 18, pp. 614-618, (1955).

[9] E. Martinelli: *Sulla varietà delle faccette p-dimensionali di S_r,* Mem. Acc. d'Italia, 12, pp. 917-943, (1942).

[10] M. Rosati: *Proprietà topologiche della varietà degli elementi differenziali del 2⁰ ordine dell' S_r complesso,* Ann. di Matem. Pura ed Applic., (IV), Vol. LVIII, pp. 109-124, (1962).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 25 luglio 1981
ed accettato per la pubblicazione il 31 luglio 1981,
su parere favorevole di E. Martinelli e di G. Vaccaro.

Regolarità e principio di massimo per le soluzioni di una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui

di **MAURIZIO CHICCO** (Genova) (*)

Summary - *A class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients is considered. Some results about the regularity of solutions and the maximum principle are proved.*

1. Introduzione.

In un aperto limitato Ω di R^n (a frontiera sufficientemente regolare) si considera il problema di Dirichlet

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu+\lambda u=f & \text{q. o. in } \Omega, \\ u\in W^2(\Omega)\cap W_0^1(\Omega) \end{cases}$$

essendo f data in $L_2(\Omega)$ e

$$L=-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c.$$

Sui coefficienti a_{ij} si fa un'ipotesi già considerata in [2] e cioè: esiste un sottoinsieme misurabile E di Ω tale che

$$(2)\qquad a_{ij}=a_{ij}^{(1)}\,\chi_E+a_{ij}^{(2)}\,(1-\chi_E)\quad \text{in}\quad \Omega$$

(*) Istituto per la Matematica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova.

ove $a_{ij}^{(k)} \in C^2(\bar{\Omega})$ $(k=1,2;\ i,j=1,2,\dots,n)$, $\chi_E=$ funzione caratteristica di E.

L'operatore L inoltre si suppone uniformemente ellittico. Nel citato lavoro ([2], remark 2.4) si è provato che se λ è abbastanza grande il problema (1) ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia la funzione f data in $L_2(\Omega)$. Nella presente nota si dimostra innanzitutto che, in ulteriori ipotesi di regolarità per l'insieme E e per le funzioni f, $a_{ij}^{(k)}$ $(k=1,2;\ i,j=1,2,\dots,n)$, le soluzioni u del problema (1) appartengono a qualche spazio $W^{2,q}(\Omega)$ con $q>2$ (od anche a $W^{2,\infty}(\Omega)$). Di qui si deduce il principio di massimo e poi esistenza ed unicità della soluzione di (1) non appena $\lambda+\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c>0$.

2. Notazioni ed ipotesi.

Salvo esplicita menzione contraria, si supporrà quanto segue. Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di R^n $(n\geq 3)$ con frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2.

Siano $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)} \in C^2(\bar{\Omega})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$, $a_{ij}^{(k)}=a_{ji}^{(k)}$ $(k=1,2;$ $i,j=1,2,\dots,n)$ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} t_i t_j \geq |t|^2$ in Ω per ogni $t\in R^n$ $(k=1,2)$, E un sottoinsieme misurabile di Ω, χ_E funzione caratteristica di E, $b_i \in L_n(\Omega)$, $(i=1,2,\dots,n)$, $c\in L_p(\Omega)$ con $p=2$ se $n=3$, $p>2$ se $n=4$, $p=n/2$ se $n\geq 5$. Si suppone inoltre che sia valida la (2).

Per le definizioni e le proprietà degli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ si rimanda ad esempio a [5]. Si scriverà $W_0^1(\Omega)$, $W^k(\Omega)$ rispettivamente in luogo di $W_0^{1,2}(\Omega)$, $W^k(\Omega)$. Indicheremo infine con $W_*^{k,p}(\Omega)$ (oppure $W_*^k(\Omega)$ se $p=2$) lo spazio ottenuto completando $C^\infty(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\|u\|_{W_*^{k,p}(\Omega)}=\sum_{l=0}^{k}\ \sum_{l_1+l_2+\dots l_{n-1}=l}\left\|\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}\,\partial x_2^{l_2}\dots\partial x_{n-1}^{l_{n-1}}}\right\|_{L_p(\Omega)}$$

(cioè considerando derivate, fino all'ordine k, solo rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$).

3. Regolarità della soluzione.

Lemma 1. *Siano* $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, b_i, c \in C^{2+k}(\bar{\Omega})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$, $u\in W^2(\Omega)$ *tale che* $Lu=f$ *in* Ω *con* $f\in W_*^k(\Omega)$. *Sia* $E=\{x\in\Omega\colon x_n>0\}$ *e* $x_0\in\partial E\cap\Omega$. *Allora esiste un intorno (aperto)* U *di* x_0 *tale che*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_i x_j}\|_{W_*^k(U)}\leq K_1\left[\|f\|_{W_*^k(\Omega)}+\|u\|_{L_2(\Omega)}\right] \tag{3}$$

essendo K_1 *una costante dipendente da* k, n, x_0, U *e dai coefficienti di* L.

Dim. Poiché ovviamente è $W_*^0(\Omega)=L_2(\Omega)$, la (3) è vera per $k=0$ (vedi [2]). Procedendo per induzione, supponiamo la (3) vera per $k-1$ e dimostriamola per k. Sia ξ una funzione di classe $C_0^\infty(U)$ uguale ad 1 in un intorno U' di x_0. Allora risulta intanto

$$L(\xi u)=\xi f+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_{x_i}+\beta u \quad \text{q. o. in } U \tag{4}$$

essendo α_i, β $(i=1,2,\dots,n)$ opportune funzioni dipendenti da ξ e dai coefficienti di L. Tenendo conto anche dell'ipotesi induttiva, è facile verificare che risulta $L(\xi u)\in W_*^k(\Omega)$. Sia ora e_r il versore dell'asse r-esimo, con $r<n$. Posto

$$g_{(h)}=\frac{g(x+he_r)-g(x)}{h} \quad \text{(con } h \text{ abbastanza piccolo e non nullo)}$$

dalla (4) si deduce

$$[L(\xi u)]_{(h)}=\xi_{(h)}f+\xi f_{(h)}+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)_{(h)}u_{x_i}+ \tag{5}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u_{x_i})_{(h)}+\beta_{(h)}u+\beta u_{(h)}.$$

Si procede poi, in modo analogo, al calcolo della differenza $[L(\xi u)]_{(h)}-$ $-L[\xi u_{(h)}]$ (confronta [2] pag. 6), ottenendo che essa consiste soltanto di termini contenenti u, u_{x_i}, $(u_{x_i})_{(h)}$, $u_{x_i x_j}$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ moltiplicati per opportune funzioni dipendenti da ξ e dai coefficienti di L (omettiamo i dettagli per brevità). Di qui e dalla (5) si deduce

$$L[\xi u_{(h)}]=\xi_{(h)}f+\xi f_{(h)}+\text{termini contenenti } u,\ u_{x_i},\ (u_{x_i})_{(h)},\ u_{x_i x_j} \tag{6}$$
$$(i,j=1,2,\dots,n).$$

Per noti risultati (vedi ad esempio [6]) valgono, per le funzioni g aventi supporto compatto in U, disuguaglianze del tipo

(7) $$\|g_{(h)}\|_{L_p(U)} \leq K_2 \|g_{e_r}\|_{L_p(U)}$$

essendo K_2 una costante opportuna dipendente da U e dal supporto di g (purché h sia abbastanza piccolo). Allora applicando la (3) alla (6) (con $k-1$ al posto di k) e tenendo conto della (7) si ottiene facilmente

(8) $$\sum_{i,j=1}^{n} \|(\xi u_{(h)})_{x_i x_j}\|_{W_*^{k-1}(U)} \leq K_3 [\|f\|_{W_*^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

essendo K_3 una costante dipendente da k, n, U, ξ e dai coefficienti di L. Infine si fa tendere h a zero nella (8); allora (vedi ancora [6]) $u_{(h)}$ tende a u_{x_r} quasi ovunque. Ricordando che $\xi=1$ in U' si ottiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_{x_r x_i x_j}\|_{W_*^{k-1}(U')} \leq K_3 [\|f\|_{W_*^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}].$$

Poiché x_r è un qualunque asse diverso da x_n, questa è la tesi. □

LEMMA 2. *Assumiamo le stesse notazioni ed ipotesi del lemma precedente. Sia poi k un intero non negativo e*

$$q = \begin{cases} +\infty & \textit{se } 2k>n \\ \textit{reale qualunque} & \textit{se } 2k=n \\ 2n/(n-2k) & \textit{se } 2k<n \end{cases}$$

con $f \in W^k(\Omega)$. Allora esiste un intorno U di x_0 tale che

(9) $$\|u\|_{W^{2,q}(U)} \leq K_4 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

essendo K_4 una costante dipendente da k, n, x_0, U e dai coefficienti di L.

DIM. La tesi è ovvia per $k=0$ ([2]); procedendo per induzione assumiamola vera per $k-1$ e dimostriamola per k. Sia ξ scelta come nel lemma precedente (cioè $\xi \in C_0^\infty(U)$, $\xi=1$ in un intorno U' di x_0) e sia x_r un asse cartesiano con $r<n$. Risulta allora $(\xi u)_{x_r} \in W_*^k(U)$ per il lemma precedente e quindi

$$L[(\xi u)_{x_r}] = \xi_{x_r} f + \xi f_{x_r} + \text{termini contenenti } u, u_{x_i}, u_{x_i x_j} (i,j=1,2,\dots,n).$$

Dalla (9) (scritta con $k-1$ al posto di k), dal lemma precedente e

dai teoremi di immersione si ottiene facilmente

(10) $$\sum_{r=1}^{n-1} \|(\xi u)_{x_r}\|_{W^{2,\bar{q}}(U)} \leq K_5 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

dove K_5 è una costante dipendente da ξ e dagli stessi argomenti da cui dipende K_4, e inoltre

$$\bar{q} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 2(k-1)>n \\ \text{reale qualunque} & \text{se } 2(k-1)=n \\ 2n/(n-2k+2) & \text{se } 2(k-1)<n. \end{cases}$$

La (10) si può riscrivere

(11) $$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|(\xi u)_{x_r x_i}\|_{W^{1,\bar{q}}(U)} \leq K_5 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}].$$

Sia ora ad esempio $2k<n$ e quindi $q=2n/(n-2k)$, $\bar{q}=2n/(n-2k+2)$. Per i noti teoremi di immersione dalla (11) si ottiene

(12) $$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|(\xi u)_{x_r x_i}\|_{L_q(U)} \leq K_6 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

essendo K_6 una costante dipendente dagli stessi argomenti di K_5. La (12) fornisce la tesi per quanto riguarda le derivate seconde di ξu esclusa $(\xi u)_{x_n x_n}$. Risulta tuttavia per la (4):

(13) $$(\xi u)_{x_n x_n} = \frac{-1}{a_{nn}} [\xi f + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} (\xi u)_{x_i x_j} + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{in} (\xi u)_{x_i x_n} +$$
$$+ \text{termini contenenti } u, u_{x_i} (i=1,2,\dots,n)].$$

Dalla (13), tenuto conto della (12), dell'ipotesi induttiva e dei teoremi di immersione, si ottiene facilmente una maggiorazione analoga alla (12) anche per la derivata $(\xi u)_{x_n x_n}$. Ciò prova il lemma nel caso $2k<n$; gli altri casi sono analoghi e si possono lasciare al lettore (basta applicare diversamente i teoremi di immersione). □

OSSERVAZIONE. Dalla dimostrazione dei lemmi precedenti si deduce che, nelle disuguaglianze (3) e (9), si potrebbero scrivere le norme a secondo membro sostituendo ad Ω un opportuno intorno U^* di x_0 contenente $\bar{U}$. □

Osservazione. Si vede facilmente che la tesi dei lemmi precedenti non può essere migliorata nel senso di ottenere la continuità delle derivate seconde della soluzione u, anche dando a k valori arbitrariamente grandi.

Ad esempio sia $\Omega = R^n, E = \{x \in R^n: x_n > 0\}$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n-1)$, $a_{in}^{(1)} = a_{in}^{(2)} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, $a_{nn}^{(1)} = 2$, $a_{nn}^{(2)} = 1$, $b_i = c = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f = 1$ in Ω. La funzione

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x_n^2, & x \in E, \\ \frac{1}{2} x_n^2, & x \in \Omega \backslash E \end{cases}$$

soddisfa l'equazione $Lu = f$ quasi ovunque in Ω, ed ha la derivata seconda rispetto ad $x_n x_n$ discontinua su ∂E. □

Teorema 1. *Sia k un intero non negativo ed E un aperto contenuto in Ω con la propria chiusura e dotato di frontiera rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^{3+k}. Supponiamo inoltre che $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, b_i, c \in C^{2+k}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, $f \in W^k(\Omega)$, $u \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$, $Lu = f$ quasi ovunque in Ω. Allora risulta*

$$\|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq K_7 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]$$

ove q è definito, in dipendenza da k, come nel lemma precedente, e K_7 è una costante dipendente da n, Ω, E, k e dai coefficienti di L.

Dim. Sia $x_0 \in \partial E$. Cambiando le variabili in un intorno (aperto) U di x_0 ci si può ricondurre al caso in cui $(\partial E) \cap U$ sia contenuto nell'iperpiano $\{x \in R^n: x_n = 0\}$ (per maggiori particolari su questo punto si veda ad esempio [3] pag. 244). Si può quindi applicare il lemma precedente ottenendo

$$\|u\|_{W^{2,q}(U)} \leq K_8 [\|f\|_{W^k(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}] \tag{14}$$

(si tenga altresì presente la prima osservazione che segue il lemma 2).

Siano ora U_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ un numero finito di intorni come U della (14) tali che $\partial E \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_j$; siano poi A_j $(j = 1, 2, \dots, s)$ un numero finito di aperti con frontiera regolare tali che $(\partial E) \cap A_j = \phi$ $(j = 1, 2, \dots, s)$ e che $\Omega \subset (\bigcup_{j=1}^{r} U_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{s} A_j)$. La disuguaglianza (14) è ancora valida sostituendo ad U gli aperti $\Omega \cap A_j$ $(j = 1, 2, \dots, s)$ perché in essi i coefficienti di L sono regolari: si possono quindi applicare ad esempio i risultati di [1]. Pertanto si può considerare una partizione dell'unità in Ω subordinata al ricoprimento $(\bigcup_{j=1}^{r} U_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{r} A_j)$; per ciascuno di tali aperti costituenti il ricoprimento è verificata una disuguaglianza come la (14). Allora procedendo in modo consueto (si veda ad esempio [11] per una situazione simile) si ha la tesi. □

4. Il principio di massimo.

Teorema 2. *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema precedente, con $k > (n-2)/2$. Sia inoltre $c \geq 0$ in Ω, $f \leq 0$ in Ω, $u \in W^2(\Omega)$, $u \leq 0$ su $\partial\Omega$, $Lu = f$ in Ω. Allora risulta $u \leq 0$ in Ω.*

Dim. Si possono applicare, con qualche cautela, i classici risultati di E. Hopf circa il principio di massimo ([7], [8]). Non è restrittivo supporre Ω connesso, perché in caso contrario basta ragionare in ogni componente connessa di Ω. In base al teorema precedente e a ben noti teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev, la soluzione u e le sue derivate prime sono hoelderiane in $\bar{\Omega}$. Per assurdo sia x_0 un punto di Ω in cui la funzione u assume il suo massimo assoluto positivo; x_0 è necessariamente interno ad Ω essendo per ipotesi $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Faremo vedere che u è costante in un intorno di x_0, e quindi costante in Ω, il che è asurdo.

Se x_0 è interno ad E o ad $\Omega \backslash \bar{E}$, esiste un intorno di x_0 in cui i coefficienti di L (e quindi u) sono regolari; in tale intorno si può allora applicare il principio di massimo forte di Hopf ([7]), ottenendo che u è costante in un intorno di x_0.

Se $x_0 \in \partial E$ questo procedimento non si può più seguire, perché non è detto che esistano in x_0 le derivate seconde di u. Si può tuttavia adattare l'altro teorema di Hopf (in [8]): esiste infatti evidentemente una sfera S contenuta in E e tale che $(\partial S) \cap (\partial E) = \{x_0\}$. Poiché in S i coefficienti di L sono regolari, si può applicare in S il principio di massimo e quindi anche il teorema di [8]. Si ottiene così che vale la seguente alternativa:

risulta $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \neq 0$, essendo ν la direzione della normale a ∂E in x_0, oppure u è costante in S. Poiché x_0 è punto di massimo assoluto per u ed x_0 è interno ad Ω, risulta $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)=0$, quindi u è costante in S; per quanto già dimostrato u è costante anche in E. In modo analogo si dimostra che u è costante in $\Omega \backslash E$: assurdo. □

Corollario 1. *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 1 con $k>(n-2)/2$; sia inoltre $c \geq 0$ in Ω, $f \leq 0$ in Ω, $u \in W^2(\Omega)$, $Lu=f$ in Ω. Allora risulta*

$$u \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega} u\} \quad in \quad \Omega.$$

Dim. Segue banalmente dal teorema precedente. □

Corollario 2. *Siano soddisfatte le ipotesi del corollario precedente e sia inoltre $f \in L_\infty(\Omega) \cap W^k(\Omega)$, $c \geq c_0$ in Ω con c_0 costante positiva, $u \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$. Allora risulta*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_0^{-1} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{15}$$

Dim. (P. L. Lions [9]). Posto $w=u\,\|f\|^{-1}_{L_\infty(\Omega)}$ risulta $-1 \leq Lw \leq 1$ in Ω, da cui $L(w-1/c_0) \leq 0$ in Ω, $L(-1/c_0-w) \leq 0$ in Ω. Dal teorema 2 segue quindi $-1/c_0 \leq w \leq 1/c_0$ in Ω, cioè la tesi. □

5. **Teorema di esistenza ed unicità.**

Ritorniamo in questo paragrafo al caso generale, in cui E è un sottoinsieme misurabile di Ω e i coefficienti $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}$ appartengono a $C^2(\bar{\Omega})$. Si è già osservato che il problema (1) ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia la funzione f data in $L_2(\Omega)$, non appena il parametro reale λ è abbastanza grande: vedi [2]. Vogliamo ora dimostrare che tale conclusione è valida purché $\lambda + \mathrm{ess}_\Omega \inf c > 0$.

Teorema 3. *Sia $f \in L_2(\Omega)$, $\lambda + \mathrm{ess}_\Omega \inf c>0$. Allora il problema (1) ammette una ed una sola soluzione u. Inoltre se $f \leq 0$ q. o. in Ω risulta $u \leq 0$ q. o. in Ω.*

Dim. Si procede in modo simile a quanto fatto in [4]. Sia E_0 un insieme tale che mis $(E \backslash E_0)+$ mis $(E_0 \backslash E)=0$, ed esista una successione di aperti E_m $(m=1,2,\dots)$ colle seguenti proprietà:

$\bar{E}_m \subset \Omega$, E_m si può rappresentare localmente come grafico di una funzione di classe C^∞ $(m=1,2,\dots)$, $\lim_m$ [mis $(E_m \backslash E_0)+$ mis $(E_0 \backslash E_m)]=0$.

Siano poi $a^{(1)}_{ijm}, a^{(2)}_{ijm}, b_{im}, c_m$ $(m=1,2,\dots)$ funzioni di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che $c_m \geq \mathrm{ess}_\Omega \inf c$ in Ω $(m=1,2,\dots)$ e

$$\begin{cases} \lim_m \left[\sum_{i,j=1}^n \|a_{ijm}^{(1)}-a_{ij}^{(1)}\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^n \|a_{ijm}^{(2)}-a_{ij}^{(2)}\|_{C^2(\bar{\Omega})} \right]=0, \\ \lim_m \left[\sum_{i=1}^n \|b_{im}-b_i\|_{L_n(\Omega)} + \|c-c_m\|_{L_p(\Omega)} \right]=0, \end{cases} \tag{16}$$

e si ponga

$$a_{ijm}=a_{ijm}^{(1)}\chi_{E_m}+a_{ijm}^{(2)}(1-\chi_{E_m}) \qquad (m=1,2,\dots)$$

essendo χ_{E_m} la funzione caratteristica di E_m. Sia inoltre

$$L_m=-\sum_{i,j=1}^n a_{ijm}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_{im}\frac{\partial}{\partial x_i}+c_m \qquad (m=1,2,\dots).$$

Per i risultati di [2] esistono due costanti λ_0 e K_9 tali che

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq K_9 \|L_m u+\lambda_0 u\|_{L_2(\Omega)} \qquad (m=1,2,\dots) \tag{17}$$

per ogni $u \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$; si può facilmente verificare (tenuto conto delle (16)) che le costanti λ_0 e K_9 possono essere scelte indipendenti da m. Data f in $L_\infty(\Omega) \cap W^k(\Omega)$ con $k>(n-2)/2$, consideriamo i problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} L_m u_m+\lambda u_m=f \quad \text{q. o. in } \Omega, \\ u_m \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega) \quad (m=1,2,\dots). \end{cases} \tag{18}$$

Tali problemi hanno una ed una sola soluzione u_m almeno quando $\lambda=\lambda_0$ (in forza della (17)). Pertanto per essi vale la teoria di Riesz-Fredholm e, qualunque sia λ, l'unicità della soluzione implica la sua esistenza. Essendosi supposto

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c_m+\lambda \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c+\lambda=c_0>0 \quad (m=1,2,\ldots),$$

la soluzione u_m del problema (18) è unica (e quindi esiste) per il corollario 1; sempre per tale corollario $u_m \leq 0$ in Ω $(m=1,2,\ldots)$ purché $f \leq 0$ q. o. in Ω.

Inoltre per il corollario 2 risulta

$$\|u_m\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_0^{-1} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad (m=1,2,\ldots) \tag{19}$$

quindi dalle (17), (19)

$$\|u_m\|_{W^2(\Omega)} \leq K_9 \|f+(\lambda_0-\lambda)\, u_m\|_{L_2(\Omega)} \leq \tag{20}$$

$$\leq K_9 (\text{mis}\,\Omega)^{1/2} (1+|\lambda_0-\lambda|/c_0) \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad (m=1,2,\ldots).$$

A questo punto si può ripetere, con poche ovvie varianti, la dimostrazione del teorema di [4], cui si rimanda per brevità.

L'ultima affermazione della tesi, cioè che $u \leq 0$ q. o. in Ω, è conseguenza della (20) (che implica la convergenza debole ad u di un'estratta dalla successione $\{u_m\}_{m\in N}$) e del fatto che $u_m \leq 0$ in Ω $(m=1,2,\ldots)$ se $f \leq 0$ q. o. in Ω. □

Corollario 3. *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema precedente, e inoltre* $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} b_i > -\infty$ *oppure* $\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} b_i < +\infty$ *per almeno un valore di* i $(1 \leq i \leq n)$. *Allora la tesi del teorema precedente sussiste anche se* $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c+\lambda=0$.

Dim: è la stessa di [3], corollario 13. □

Osservazione. Si potrebbero ottenere ulteriori proprietà di regolarità per le soluzioni del problema (1) (ad esempio: disuguaglianza di Harnack, principio di massimo forte, hoelderianità delle soluzioni) utilizzando l'approssimazione con le soluzioni u_m dei problemi (18) e applicando a tali funzioni i risultati di Trudinger [10]. □

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I. Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[2] H. Brezis - L. C. Evans: *A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators.* Arch. Rat. Mech. Anal. **71** (1979), 1-13.

[3] M. Chicco: *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **100** (1974), 239-258.

[4] M. Chicco: *Osservazione sulla risolubilità del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **66** (1982), 137-141.

[5] E. Gagliardo: *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche Mat. **7** (1958), 102-137.

[6] E. Giusti: *Equazioni ellittiche del secondo ordine.* Pitagora editrice, Bologna (1978).

[7] E. Hopf: *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter ordnung vom elliptischen typus.* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **19** (1927), 147-152.

[8] E. Hopf: *A remark on linear elliptic differential equations of the second order.* Proc. Amer Math. Soc. **3** (1952), 791-793.

[9] P. L. Lions: *Problèmes elliptiques du 2ème ordre non sous forme divergence.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **84 A** (1979), 263-271.

[10] N. S. Trudinger: *Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations.* Invent. Math. **61** (1980), 67-79.

[11] M. Venturino: *Sull'appartenenza ad* $H^3(\Omega)$ *delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui.* Analisi Funzionale e Aplicazioni (suppl. del Boll. Un. Mat. Ital.) **1** (1980), 197-218.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 12 settembre 1981
ed accettato per la pubblicazione il 14 ottobre 1981,
su parere favorevole di M. G. Garroni Platone e di U. Mosco.