CHICCO, MAURIZIO
1968
Boll. U. M. I.
(4), N. 4-5, pp. 548-553

# Semicontinuità delle sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

**Summary** - *I prove the (essential) upper semicontinuity of subsolution of second order elliptic partial differential equations in divergence form with discontinuous coefficients.*

**Notazioni e premesse.** - Nel corso del presente lavoro si faranno sempre le seguenti ipotesi, senza esplicita menzione. Sia $\Omega$ un insieme aperto e limitato di $R^n$; siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$, $c \in L_{p/2}(\Omega)$, $p > n$;

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \nu\,|\lambda|^2$ con $\nu$ costante positiva;

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i\, u_{x_i} v + d_i\, u v_{x_i}) + cuv \right\} dx.$$

Siano $H^1(\Omega)$ ed $H_0^1(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Scopo di questo lavoro è studiare la semicontinuità delle soluzioni $u \in H^1(\Omega)$ della disequazione

$$a(u, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0.$$

Nel caso in cui $b_i = d_i = c = 0$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ il problema è stato risolto in [1] (pag. 68) attraverso lo studio della funzione di Green. Qui si userà invece un procedimento di approssimazione monotona mediante soluzioni di opportuni problemi di DIRICHLET.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

TEOREMA 1. – «*Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$; $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq 0$ *nel senso delle distribuzioni.*
*Allora esiste una funzione* $\bar{u}$ *tale che* $\bar{u} = u$ *quasi ovunque in* $\Omega$ *ed* $\bar{u}$ *è semicontinua superiormente in* $\Omega$.»

DIMOSTRAZIONE. – Dato il carattere locale della tesi è sufficiente provare il teorema considerando, anzichè l'aperto $\Omega$, una sfera $S$ aperta, contenuta in $\Omega$ colla sua chiusura e di raggio abbastanza piccolo in modo che la forma $a(u, v)$ sia coercitiva su $H_0^1(S)$ (teorema 3.1 di [2]). Per noti teoremi (teorema 5.1 di [2]) la funzione $u$ risulta (essenzialmente) superiormente limitata in $S$. Osserviamo che non è restrittivo supporre che $u$ sia (essenzialmente) limitata anche inferiormente in $S$. Infatti per ogni costante positiva $k$ la funzione $u_k = \max(u, -k)$ è sottosoluzione in $S$ (teorema 3.5 di [2]) ed inoltre risulta

$$u(x) = \lim_{k \to +\infty} u_k(x) \quad \text{per ogni } x \text{ di } S.$$

Pertanto se si prova la semicontinuità superiore delle funzioni limitate $u_k$, ne segue la semicontinuità di $u$.

Supponiamo dunque senz'altro che esista una costante positiva $M$ tale che

$$\text{(1)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_S |u| = M.$$

Riducendo eventualmente il raggio di $S$, non è restrittivo supporre che sia anche

$$\text{(2)} \qquad \max_{\partial S}{}^* |u| \leq M.$$

ove «max*» indica il massimo nel senso di $H^1(\Omega)$.

Essendo per ipotesi $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in C_0^\infty(S)$, $v \geq 0$, la distribuzione

$$v \longrightarrow a(u, v)$$

è una misura negativa su $S$ (vedi [3], teorema V pag. 28).

Osserviamo che tale misura è anche regolare in $S$, nel senso che per ogni insieme misurabile $A$ di $S$ e per ogni $\varepsilon$ positivo, si può trovare un insieme chiuso $A_\varepsilon$ contenuto in $A$ e tale che la misura di $A - A_\varepsilon$ sia minore di $\varepsilon$. Infatti in [3] le misure di cui si parla si identificano con gli elementi del duale dello spazio delle funzioni continue a supporto compatto in $S$. Ora tali misure «di RIESZ» sono regolari: si veda ad esempio [4], pag. 126–127.

Applicando alla misura $a(u, .)$ la decomposizione di LEBESGUE (vedi [5] teorema 14 pag. 132) si ottiene

$$a(u, v) = \int_S fv dx + \int_E v d\mu \quad \text{per ogni } v \in C_0^\infty(S) \tag{3}$$

ove $f \in L_1(S)$, $f \leq 0$, $\mu \leq 0$, $E \subset S$, ed $E$ ha misura di LEBESGUE nulla. Inoltre si vede facilmente che anche la misura $\mu$ è regolare, come differenza di due misure regolari.

Pertanto, per ogni intero positivo $m$, esiste un insieme *chiuso* $E_m$ tale che

$$E_m \subset E, \quad \mu(E - E_m) \leq \frac{1}{m}. \tag{4}$$

Non è restrittivo supporre che sia anche

$$E_{m+1} \supset E_m \quad \text{pet ogni } m. \tag{5}$$

Posto $f_m = \max(f, -m)$ consideriamo l'operatore

$$T_m \colon H_0^1(S) \longrightarrow R$$

definito da

$$T_m(v) = \int_S f_m v dx + \int_{E_m} v d\mu. \tag{6}$$

È ovvio che anche $T_m(.)$ è una misura (negativa), inoltre è

$$a(u, v) \leq T_m(v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in C_0^\infty(S), \; v \geq 0.$$

Pertanto segue dal teorema 5.3 di [1] (pag. 60) che $T_m$ è un elemento del duale di $H_0^1(S)$; ne segue che esiste ed è unica la soluzione $u_m$ del problema di DIRICHLET

$$a(u_m, v) = T_m(v) \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(S) \tag{7}$$

$$u_m - u \in H_0^1(S). \tag{8}$$

Sia $v \in H_0^1(S - E_m)$: evidentemente risulta

$$a(u_m, v) = \int_S f_m v dx,$$

e inoltre, per le (6), (7):

$$a(u_m, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(S), \; v \geq 0. \tag{9}$$

Poichè $f_m \in L_\infty(S)$, per noti teoremi la funzione $u_m$ si può supporre continua in $S - E_m$ (vedi [2], teorema 7.2).

Come facilmente si verifica, si ha

$$a(u_{m+1}-u_m, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(S),\ v \geq 0$$

da cui, tenendo presente il principio di massimo (teorema 3.6 di [2]) segue

$$u_{m+1} \leq u_m \text{ quasi ovunque in } S,$$

ed in particolare essendo $u_{m+1}$ ed $u_m$ continue in $S-E$,

$$u_{m+1} \leq u_m \text{ in } S-E. \tag{10}$$

Similmente si trova:

$$a(u-u_m,\ v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(S),\ v \geq 0 \tag{11}$$

$$u \leq u_m \text{ quasi ovunque in } S \tag{12}$$

e per le (2), (8), (9):

$$u_m \leq M \text{ quasi ovunque in } S. \tag{13}$$

Infine dalle (1), (12), (13) si conclude che

$$\operatorname{ess\,sup}_S |u_m| \leq M. \tag{14}$$

Dalle (3), (4), (6), (7), (8), (14) e per la supposta coercitività della forma $a(u, v)$ si ricava:

$$\text{cost.}\, \|u-u_m\|^2_{H_1^0(S)} \leq a(u-u_m,\ u-u_m) = \int_S (f-f_m)(u-u_m)\, dx +$$

$$+ \int_{E-E_m} (u-u_m)\, d\mu \leq 2M \left\{ \int_S |f-f_m|\, dx + \frac{1}{m} \right\},$$

la quale prova che

$$\lim_{m\to\infty} \|u-u_m\|_{H_0^1(S)} = 0. \tag{15}$$

Passando eventualmente ad una successione estratta la (15) implica

$$u = \lim_{m\to\infty} u_m \text{ quasi ovunque in } S. \tag{16}$$

Consideriamo ora le funzioni definite nel modo seguente:

$$\bar{u}_m(x) = \begin{cases} u_m(x) \text{ per } x \in S-E_m \\ \max \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y \in S-E_m}} u_m(y) \text{ per } x \in E_m \end{cases} \tag{17}$$

Le funzioni $\overline{u}_m$ sono evidentemente semicontinue superiormente in $S$.

Posto

$$\overline{u}(x) = \inf_m \overline{u}_m(x) \text{ per ogni } x \text{ di } S$$

facciamo vedere che la funzione $\overline{u}$ soddisfa alla tesi del teorema.

Intanto è immediato che $\overline{u}$ sia superiormente semicontinua in $S$.

Inoltre delle (10), (16), (17) si ha

$$\overline{u} = u \text{ quasi ovunque in } S - E$$

ed essendo mis $E = 0$, ciò equivale a dire

$$\overline{u} = u \text{ quasi ovunque in } S, \text{ c. v. d.}$$

COROLLARIO 1. – «*Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq 0$ *nel senso delle distribuzioni*, $f_i \in L_p(\Omega)$, $p > n$, $a(u, v) \leq \int \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} dx$ *per ogni* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \leq 0$.

*Allora esiste una funzione* $\overline{u}$ *semicontinua superiormente in* $\Omega$ *che coincide con* $u$ *quasi ovunque in* $\Omega$.»

DIMOSTRAZIONE. – Come nel teorema precedente non è restrittivo provare la tesi soltanto per una sfera $S$ contenuta in $\Omega$ e di raggio abbastanza piccolo in modo che la forma $a(u, v)$ sia coercitiva su $H_0^1(S)$. Sia $w$ la soluzione del problema di DIRICLHET

$$\begin{cases} a(w, v) = \int_S \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} dx \text{ per ogni } v \in H_0^1(S) \\ w - u \in H_0^1(S). \end{cases}$$

Per il teorema 7.2 di [2] la funzione $w$ si può supporre continua in $S$. D'altra parte risulta

$$a(u - w, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(S), \ v \geq 0$$

e per il teorema precedente esiste una funzione $\overline{w}$ semicontinua superiormente in $S$ e tale che

$$\overline{w} = u - w \text{ quasi ovunque in } S.$$

La funzione $\overline{w} + w$ è semicontinua superiormente in $S$ e si ha

$$u = \overline{w} + w \text{ quasi ovunque in } S, \qquad \text{c.v.d.}$$

COROLLARIO 2. - «*Nel corollario precedente l'ipotesi* $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq 0$ *nel senso delle distribuzioni si puó sostituire colla seguente:*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u > -\infty . »$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $S$ come nel corollario precedente. Sia $w$ la soluzione del problema di DIRICHLET

$$\int_S \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i w_{x_i} v \right\} dx = \int_S \left\{ - \sum_{i=1}^{n} d_i u v_{x_i} - cuv + \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} \right\} dx$$

per ogni $v \in H_0^1(S)$, $v \geq 0$;

$$w - u \in H_0^1(S).$$

Per le ipotesi fatte e per i teoremi 4.1 e 7.2 di [2] (vedi anche l'artificio a pag. 236-237 di [2]) la funzione $w$ può essere supposta continua in $S$. Si ha inoltre

$$\int_S \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (u - w)_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i (u - w)_{x_i} v \right\} dx \leq 0$$

per ogni $v \in H_0^1(S)$, $v \geq 0$. Si può ora concludere come nel corollario precedente. c. v. d.

## BIBLIOGRAFIA

[1] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. 17 (1963), pag. 43-77.

[2] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 15 (1965), pag. 189-258.

[3] L. SCHWARZT, *Théorie des distributions*, Vol. 1, Hermann (Paris).

[4] KELLEY - NAMIOKA, *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand (New York).

[5] DUNFORD - SCHWARTZ, *Linear Operators*, part 1, Interscience (New York).

*Pervenuta alla Segreteria dell'* U.M.I.
*il 1° aprile 1968*